

"CONTRIBUTION A L'ETUDE DES STRUCTURES ACCELERATRICES
MULTIPERIODIQUES RESONNANTES ET DE LEUR INTERACTION AVEC
E FAISCEAU EN REGIME PERMANENT ET EN REGIME TRANSITOIRE

ARTICLE PRINCIPAL

recouvrant en partie la thèse de
Doctorat ès Sciences Physiques
enregistrée au C.N.R.S. sous le numéro A.O 3197

TRAN DUC TIEN

soutenue le 7 mai 1969
à la FACULTE DES SCIENCES D'ORSAY

devant le Jury :

MM.	GRIVET	Président
	BERTEIN	)
	SEPTIER	)
	LAPOSTOLLE	) examinateurs
	LEBOUTET	)

STRUCTURES ACCÉLÉRATRICES BI ET TRIPÉRIODIQUES

PAR TRAN DUC TIEN

Division « Accélérateurs » de THOMSON-CSF.

Extrait de la *Revue Technique THOMSON-CSF*
Vol. 1, n° 2, juin 1969.



STRUCTURES ACCÉLÉRATRICES BI ET TRIPÉRIODIQUES (*)

PAR TRAN DUC TIEN,

Division « Accélérateurs » de THOMSON-CSF.

SOMMAIRE. — *En se basant sur la théorie des circuits à éléments localisés, on essaie d'établir une théorie générale sur les structures accélératrices multipériodiques, c'est-à-dire celles dont la période comporte plusieurs éléments résonnants de nature ou de fréquences différentes. On examine d'abord le système bipériodique dont la période comporte deux éléments résonnants différents et ensuite le système tripériodique, système qu'on propose pour la première fois et qui peut présenter des avantages sur le premier. Les études comparées expérimentales ont été menées sur trois types de lignes, l'un dérivé d'une structure à iris classique, le deuxième dérivé du premier avec l'adjonction de tubes de glissement et le troisième de type spécial permettant d'éviter l'excitation directe par le faisceau dans les cavités de champ nul. Ces études ont permis, d'une part de vérifier la théorie proposée et, d'autre part, de comparer les avantages et inconvénients de ces trois types de lignes. Les problèmes annexes ont été abordés, notamment le phénomène d'avalanche dans les zones de champ faible et le danger des modes déflecteurs.*

SUMMARY. — *With reference to the lumped circuit theory, it is endeavoured to draw up a general theory on multiperiodic structures, i. e. those whose periode comprises several resonating components of different nature or frequency. The biperiodic system, whose period comprises two different resonating components, is first considered, then the triperiodic system, proposed for the first time, which may afford advantages over the former. Comparative experimental studies have been carried out on three types of lines, one derived from a conventional iris structure, the second derived from the first and associated with a drift tube, and the third, of a special type, avoiding direct excitation by the beam in zero-field cavities. These*

(*) Manuscrit reçu le 23 juin 1969.

Ce mémoire recouvre en partie le travail de la thèse de Doctorat ès Sciences physiques intitulée : *Contribution à l'étude des structures accélératrices multipériodiques résonnantes et de leur interaction avec le faisceau en régime permanent et en régime transitoire*, soutenue le 7 mai 1969 devant la Faculté des Sciences d'Orsay et enregistrée au C. N. R. S. sous le n° A. O. 3197.

studies have enabled the proposed theory to be verified, and the advantages and drawbacks of these three types of lines to be compared. Related problems, in particular the multipactor effect in weak field areas, and the risk of deflector modes, are reviewed.

INHALTSANGABE. — Ausgehend von der Theorie der Kreise mit geballten Konstanten, wird versucht eine allgemeine Theorie der mehrfachperiodischen Beschleunigerstrukturen aufzustellen, d. h. eine Theorie der Strukturen, deren Perioden mehrere Resonanzelemente unterschiedlicher Natur bezw. unterschiedlicher Frequenz umfassen. Man untersucht zunächst eine zweifachperiodisches System, dessen Periode zwei resonante Elemente unterschiedlicher Periode umfasst, dann ein dreifachperiodisches System, das erstmalig vorgeschlagen wird und das gewisse Vorteile gegenüber dem ersten aufweist. Vergleichende Versuche wurden an drei Leitungstypen ausgeführt, wobei die eine von einer konventionellen Struktur mit Irisblende, und die zweite von der ersten durch Hinzufügen von Laufzeitröhren abgeleitet war, während die dritte eine Spezialtype darstellt, mit welcher es möglich ist die direkte Erregung durch den Strahl in den Hohlräumen mit einer Feldstärke gleich Null zu vermeiden. Durch diese Untersuchungen war es möglich, einerseits die vorgeschlagene Theorie nachzuprüfen und andererseits die Vorund Nachteile der drei Leitungen zu vergleichen. Gewisse Nebenprobleme wurden untersucht, wie z. B. die Lawinenausbildung in den Gebieten kleiner Feldstärke und die Störwellen durch Ablenkung.

1. INTRODUCTION.

Dans les accélérateurs linéaires de haute énergie à électrons et à protons actuellement en fonctionnement, on emploie généralement deux types de structures accélératrices. Pour les électrons, on utilise la structure à iris fonctionnant à 3 GHz avec, en général, des ondes progressives. Pour les protons, on utilise la structure Alvarez à une fréquence nettement plus basse, vers 200 MHz et en ondes stationnaires. Ces fréquences ont été choisies en fonction du domaine de la vitesse de chaque particule. En effet, dans un guide accélérateur à iris par exemple, lorsqu'on se rapproche de l'axe, le champ électrique longitudinal diminue d'autant plus lentement que la fréquence est basse et que la vitesse des particules est grande ⁽²⁾. Ainsi, pour les électrons dont la vitesse atteint très vite celle de la lumière, on peut choisir une longueur d'ondes très courte de manière, d'une part, à profiter des sources de puissances disponibles

(2) Le champ accélérateur varie approximativement comme la fonction de Bessel

$$I_0 \left[\frac{2\pi}{\lambda} r \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \simeq 1 + \left(\frac{\pi r}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{c^2}{v^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

r , distance à l'axe; λ , longueur d'onde; v , vitesse de la particule; c , vitesse de la lumière.

et, d'autre part, à réduire l'encombrement de l'accélérateur. Par contre, pour les particules plus lourdes, comme les protons, qu'on ne peut accélérer que lentement et pour le passage desquels il est néanmoins nécessaire de laisser un trou de diamètre assez grand, on a intérêt à baisser la fréquence. La structure Alvarez fonctionne ainsi à 200 MHz. Son principe est simple : il s'agit d'une cavité cylindrique fonctionnant au mode TM_{01} et munie de tubes de glissement. A faible vitesse, le rendement est bon. Malheureusement la longueur des tubes de glissement augmente en même temps que la vitesse des particules et comme le diamètre de ces tubes doit diminuer pour garder constante la fréquence de résonance de la cellule élémentaire, l'énergie électrique emmagasinée dans l'espace d'accélération devient de plus en plus faible. Il en résulte une perte d'efficacité importante à partir d'une vitesse de particule de l'ordre de 0,5 c. Pour les structures à protons, il reste donc un trou à combler dans la gamme des vitesses.

Cependant, à l'heure actuelle, d'autres considérations viennent bouleverser ce choix.

En effet, le besoin se fait de plus en plus pressant de disposer des impulsions d'électrons de plus en plus intenses et de durée de plus en plus courte. Avec la structure à iris fonctionnant en ondes progressives, pour apporter le plus rapidement possible de l'énergie électromagnétique nécessaire au passage rapide des électrons, il faudrait augmenter la vitesse de groupe de la structure. Or, ceci revient à augmenter le diamètre des trous de couplage aux dépens de l'efficacité. En effet, la puissance circulant vite et de ce fait l'énergie emmagasinée dans chaque cavité diminuant, la plus grande partie de la puissance reste à être dissipée dans la charge. La première idée qui vient à l'esprit est évidemment de réutiliser cette puissance en la faisant circuler à nouveau dans la structure. Et c'est ainsi que s'impose naturellement l'utilisation des structures résonnantes. Cependant, lorsqu'on désire un courant instantané d'électrons très intense, il faudrait encore baisser la fréquence, car l'énergie emmagasinée par unité de longueur de structure varie comme le carré de la longueur d'onde alors que la puissance crête ne varie que comme sa racine carrée.

Pour les protons de haute énergie, comme on a vu, la structure Alvarez n'est plus assez efficace au mode 2π , à cause de l'allongement de la période. Une solution consiste à utiliser le fonctionnement au mode π en cloisonnant les cellules. On retombe ainsi à la catégorie des structures à cavités couplées semblable à la structure à iris. Pour augmenter l'efficacité accélératrice, on a intérêt à augmenter la fréquence, car l'impédance shunt (rapport entre gain d'énergie et la puissance H. F.) est proportionnelle à sa racine carrée.

On voit ainsi que les deux buts se recoupent et il existe un effort conjugué à l'heure actuelle en Amérique et en Europe pour trouver

une structure convenable dans le domaine de fréquence de 500-800 MHz, fonctionnant en ondes stationnaires.

Le mode π est le mode le plus efficace. Cependant, dans les structures périodiques classiques, la séparation de modes au voisinage de ce mode est mauvaise à cause de la vitesse de groupe nulle, rendant la distribution de champ dans la structure extrêmement sensible à toute imperfection mécanique. Pour éviter cet inconvénient, E. A. Knapp et coll. à Los Alamos, proposèrent la structure « Side Cavity » ([1], [2], [3], [4])

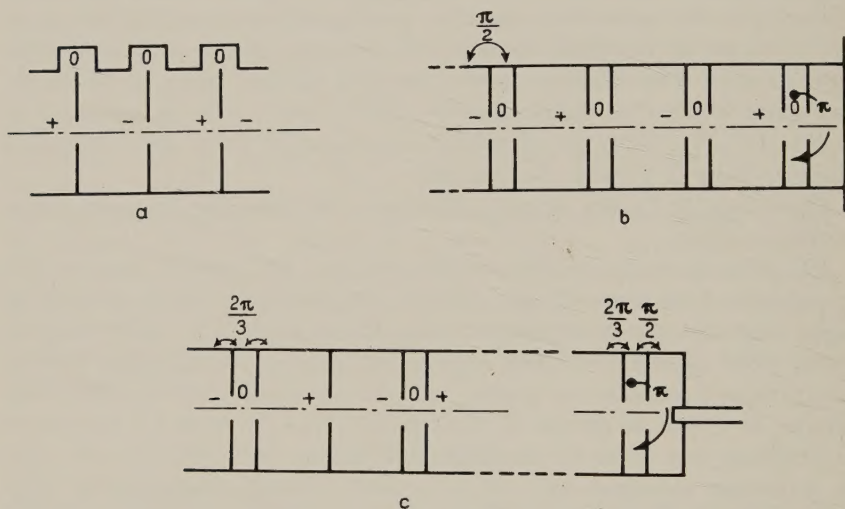


Fig. 1. — Schémas de principe. a. Structure Side-Cavity; b. Structure bipériodique APS; c. Structure tripériodique.

et S. Giordano et T. Nishikawa, à Brookhaven, la structure « APS » (Alternating Periodic Structure) ([5], [6], [7]). Ces structures rentrent dans la catégorie plus générale des structures bipériodiques, dont la période géométrique comporte deux éléments résonnants. Le fonctionnement peut s'expliquer de la manière suivante. Imaginons une structure régulière classique fonctionnant en ondes stationnaires, au mode $\frac{\pi}{2}$.

Comme le champ est alors nul dans une cavité sur deux, l'idée est de reporter celle-ci à l'extérieur (Side Cavity) ou de la réduire en dimensions (APS), de façon à profiter au maximum de l'espace pour l'accélération, comme le montrent les figures 1 a et 1 b. En résumé, la structure bipériodique constitue le compromis entre le mode $\frac{\pi}{2}$ ayant une bonne séparation de modes et le mode π ayant un bon rendement.

Dans le même ordre d'idée, au Centre de Recherches de Corbeville, nous proposons une structure de type tripériodique ([8], [9], [10], [11]) bénéficiant de la séparation de modes du mode $\frac{2\pi}{3}$ classique et du fonctionnement encore plus proche du mode π , ce qui, dans certains cas, entraîne un avantage considérable.

Pour éviter une confusion dans la terminologie, on définit une période de structure par un ensemble géométrique irréductible et on désigne le mode par son déphasage. Ainsi le fonctionnement de la structure bipériodique décrit plus haut correspond au mode π et celui de la structure tripériodique, au mode 2π .

2. GÉNÉRALITÉS SUR LES PROPRIÉTÉS DISPERSIVES DES STRUCTURES MULTIPÉRIODIQUES.

Pour bénéficier effectivement de la séparation des modes, dans les deux cas des structures bi et tripériodiques, certaines conditions doivent être remplies. En effet, suivant le cas, il pourrait exister une ou deux coupures dans la bande passante suivies des vitesses de groupes nulles justement aux points de fonctionnement possibles. Pour expliquer ce phénomène, on est amené à étudier dans ce chapitre le comportement de la courbe de dispersion, d'une manière générale, des structures multipériodiques.

On dit qu'une structure est périodique d'ordre n lorsque sa période possède n éléments résonnants. Ces éléments résonnants peuvent être de même nature ou de natures différentes et assemblés suivant une disposition plus ou moins complexe.

Le cas le plus simple correspond à celui d'une structure formée d'une succession d'éléments couplés de telle façon qu'on puisse trouver un plan de symétrie qui ne perturberait pas le fonctionnement. Il s'agit des structures où il n'existe pas de couplage entre périodes.

Par contre, il existe des structures où les éléments résonnants sont juxtaposés et où les couplages s'imbriquent de façon qu'il est impossible de trouver un seul plan de symétrie qui ne perturberait pas le fonctionnement, comme, par exemple, une structure de type interdigitale ou une structure formée de deux lignes périodiques couplées d'une façon quelconque.

Cependant, quelle que soit la complexité de la structure, il s'agit toujours d'un système linéaire et réciproque, ce qui permet d'exprimer les quantités électromagnétiques à la sortie d'une période en fonction des mêmes quantités à l'entrée par une relation matricielle

$$(1) \quad \mathbf{V}_S = M \mathbf{V}_E,$$

où la matrice de transfert M a un déterminant unité.

La trace de M ne dépend pas de l'origine choisie et reste invariable à tout changement d'axe, en particulier par celui qui transforme M en une matrice diagonale dont les éléments sont justement les valeurs propres du système.

Dans le cas des structures simples, le modèle quadrupolaire suffit. En vertu de la réciprocité, il existe alors un couple de valeurs propres inverses $\lambda_1 = \exp(\theta)$, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} = \exp(-\theta)$ et par conséquent une trace égale à $2 \operatorname{ch} \theta$. Pour une ligne sans pertes, il n'y a pas d'affaiblissement dans la bande passante : θ est imaginaire pur, c'est-à-dire $\theta = j\beta$, où β est réel et représente le déphasage de la période. On est amené alors à définir la bande passante par la relation :

$$(2) \quad |F(\omega)| = \left| \frac{1}{2} \operatorname{Trace} M \right| = |\cos \beta| \leq 1,$$

où $F(\omega)$ est, par définition, la relation de dispersion de la structure. La vitesse de groupe s'en déduit par

$$(3) \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \pm \frac{\sqrt{1 - F^2}}{\frac{\partial F}{\partial \omega}},$$

où la période a été prise comme unité de longueur.

La relation (3) montre qu'aux modes de coupure ($\beta = k\pi$, $F = \pm 1$) la vitesse de groupe v_g est nulle sauf lorsque $F(\omega)$ passe par un extrêum ($\frac{\partial F}{\partial \omega} = 0$), auquel cas v_g est finie et s'écrit

$$(4) \quad v_g = \pm \sqrt{\frac{-F(\omega_{k\pi})}{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^2}\right)_{\omega_{k\pi}}}}.$$

C'est la situation intéressante que l'on cherche à réaliser au mode π dans une structure bipériodique et au mode 2π dans une structure tripériodique.

Pour examiner plus en détail la forme de $F(\omega)$, on peut utiliser les modèles à éléments localisés en se limitant à des résistances positives, à des inductances propres ou mutuelles et à des capacités. Ces modèles répondent à deux propriétés de linéarité et de réciprocité. De plus, le fait de supposer que les fonctions d'impédance sont des fonctions positives réelles (résistance positive), trouve sa justification dans la théorie des cavités électromagnétiques. La seule hypothèse restrictive consiste à supposer que les éléments localisés ne dépendent pas de la fréquence. Cependant, si l'on s'intéresse à des bandes passantes relativement faibles, comme cela est toujours le cas dans la pratique, cette hypothèse ne doit pas nuire à la généralité des conclusions.

Dans ces conditions la relation de dispersion s'écrit explicitement en fonction des impédances du quadrupôle,

$$(5) \quad F(p) = \frac{M_{11} + M_{22}}{2} = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}},$$

où Z_{11} et Z_{22} sont positives-réelles, c'est-à-dire de pôles simples à résidus positifs, de zéros simples et rationnelles en $p = j\omega$. Par contre, l'impé-

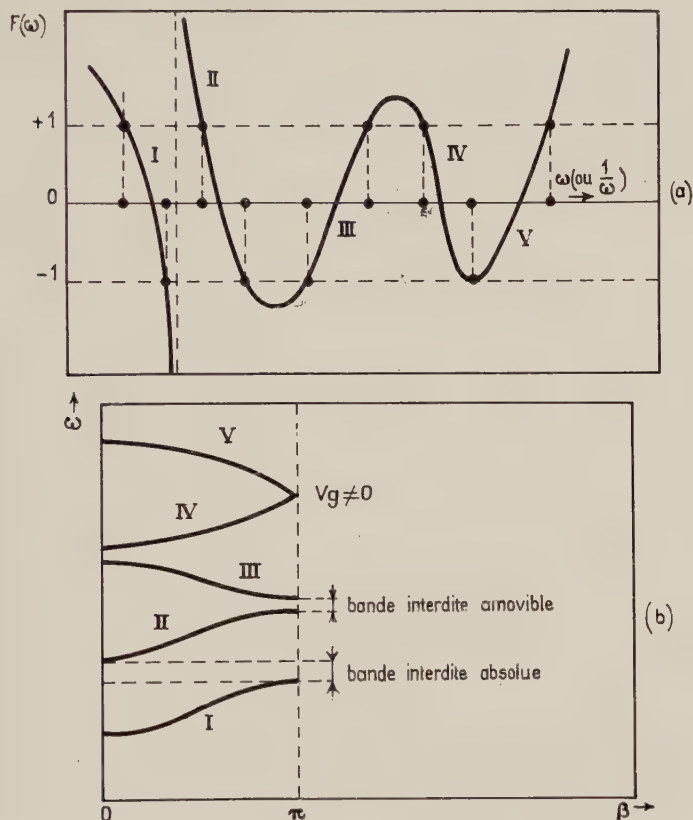


Fig. 2.

a. Allure générale de la relation de dispersion $F(\omega)$;

b. Allure générale des courbes de dispersion $\omega(\beta)$.

dance de transfert Z_{12} n'est pas nécessairement positive-réelle, mais analytique, de pôles simples et rationnelle en p .

Il en résulte que $F(\omega)$ est une fonction uniforme, de pôles simples et de zéros simples. Elle est composée d'une partie paire en ω et une partie impaire en ω , qui disparaît dans une structure sans pertes.

La variation de la relation de dispersion $F(\omega)$ aura donc l'allure de la figure 2 a à laquelle correspondent les courbes de dispersion de la figure 2 b.

On peut déduire des propriétés suivantes :

- Il n'y a pas de recouvrement de deux bandes passantes (uniformité).
- Entre deux bandes passantes de même sens, il existe une bande interdite absolue que l'on ne pourrait supprimer (pôle simple).
- Entre deux bandes passantes de sens contraire, la bande interdite peut disparaître, auquel cas la vitesse de groupe est différente de zéro. Autrement dit, lorsqu'une courbe de dispersion accuse une pente non nulle au voisinage du mode de coupure, il existe nécessairement une bande passante adjacente.
- La courbe $F(\omega)$ ne doit pas avoir un extrêmu dans la bande passante.

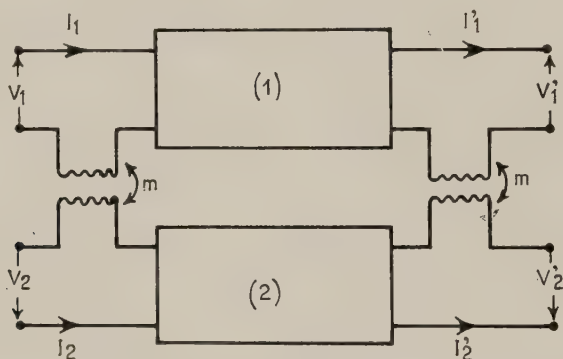


Fig. 3. — Schéma d'une période de structure, modèle octopolaire.

Ces propriétés s'appliquent aux structures simples représentables par des modèles quadripolaires. Avec des systèmes plus complexes, il est nécessaire d'utiliser des modèles octopolaires, c'est-à-dire à quatre paires de bornes. La matrice de transfert est maintenant une matrice 4×4 . La propriété de réciprocité et le caractère positif-réel des éléments Z_{mm} permettent cependant de traiter cette matrice d'une façon relativement simple. En effet, on peut démontrer que ses valeurs propres se groupent en deux couples inverses λ, λ^{-1} et λ', λ'^{-1} de telle façon qu'on puisse définir deux relations de dispersion :

$$(6) \quad \begin{cases} F(\omega) = \frac{1}{2} (\lambda + \lambda^{-1}) = \text{ch } \theta, \\ F'(\omega) = \frac{1}{2} (\lambda' + \lambda'^{-1}) = \text{ch } \theta' \end{cases}$$

à partir desquelles on définit les bandes passantes par des relations analogues à (2).

Pour se fixer les idées, on considère le modèle de la figure 3, où la période de la structure est constituée de deux quadrupôles couplés magnétiquement. Le choix de ce couplage n'enlève pas la généralité du calcul, car dans le résultat final, il suffit de remplacer $jm\omega$ par une impédance de couplage d'un type quelconque. On se propose d'étudier les propriétés dispersives du système octopolaire ainsi défini à partir de celles des deux quadrupôles élémentaires, supposées connues. On négligera les pertes.

L'équation caractéristique de l'octopôle peut se mettre sous la forme d'une équation du quatrième degré symétrique

$$\lambda^4 - 2A\lambda^2 + (2 + B)\lambda^2 - 2A\lambda + 1 = 0$$

dont on tire les relations de dispersion :

$$(8) \quad \left. \begin{array}{l} F(\omega) \\ F'(\omega) \end{array} \right\} = \cos \beta = \frac{1}{2} (A \pm \sqrt{A^2 - B}),$$

où A et B s'expriment en fonction des éléments m_{ij} de la matrice de transfert M , par

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 m_{ii}, \\ 2 + B = \sum_{ij} (m_{ii} m_{jj} - m_{ij} m_{ji}); \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right.$$

$F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ étant les relations de dispersion des quadrupôles 1 et 2 en absence du couplage m , on démontre que la relation de dispersion de l'ensemble peut se mettre sous la forme [12] (annexe I) :

$$(10) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \left[F_1(\omega) + F_2(\omega) \pm \sqrt{[F_1(\omega) - F_2(\omega)]^2 - \frac{4m^2\omega^2}{Z_{21}^{(1)} Z_{21}^{(2)}}} \right],$$

où les indices (1) ou (2) se rapportent aux quadrupôles 1 ou 2.

Comme le signe de l'impédance de transfert Z_{21} détermine le sens de la courbe de dispersion, le signe du terme provenant du couplage m sous le signe radical, dépend de la nature des deux quadrupôles.

Lorsque les quadrupôles sont du même type, le produit $Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}$ est négatif, Z_{21} étant imaginaire pur, le terme sous le signe radical de la relation (10) est toujours positif. Dans le cas où les courbes de dispersion ne se coupent pas, le terme $[F_1(\omega) - F_2(\omega)]^2$ ne s'annule jamais, l'effet du couplage n'aura qu'une influence faible sur les courbes de dispersions qui ne s'écartent que légèrement. Dans le cas contraire, le

point de croisement se dédouble pour donner naissance à deux branches séparées, comme le montre la figure 4.

Lorsque les deux quadrupôles sont de types différents, le produit $Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}$ est positif. La relation (10) montre qu'il existe au voisinage du croisement une bande de fréquence dans laquelle le déphasage est imaginaire, donc interdite. Dans le cas d'une structure composée de

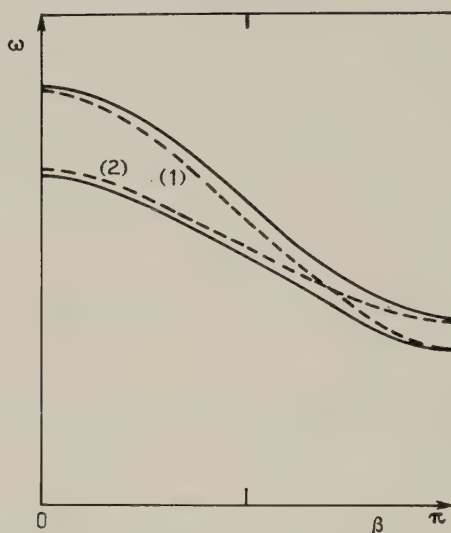


Fig. 4. — Courbes de dispersion du modèle octopolaire lorsque les quadrupôles constituants sont de même type.

deux quadrupôles simples, l'un de type à couplage magnétique et l'autre de type à couplage électrique, les limites $\omega_{1,2}$ de la bande interdite sont définies par

$$(11) \quad \Delta F_{1,2} = |F_1(\omega_{1,2}) - F_2(\omega_{1,2})| = \frac{\sqrt{2} k}{\sqrt{(1-\varepsilon) BP_1 \cdot BP_2}} \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} \quad (\text{Annexe I}),$$

où k est le coefficient de couplage entre les quadrupôles, BP_1 , BP_2 les bandes passantes des courbes de dispersion d'origine, ω_0 la pulsation médiane des deux pulsations centrales et ε leur écart relatif. La largeur de la bande interdite dépend donc du coefficient de couplage k et est pratiquement proportionnelle à celui-ci ($\simeq \frac{3}{4}k$). La figure 5 montre la construction géométrique simple de la fonction $F(\omega)$ résultante (courbes en trait plein) à partir des fonctions $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ (courbes en traits brisés). Les points à tangentes verticales de $F(\omega)$ correspondent aux extrêmes des courbes de dispersion de la figure 6. Lorsque le couplage m est assez important ces extrêmes peuvent disparaître.

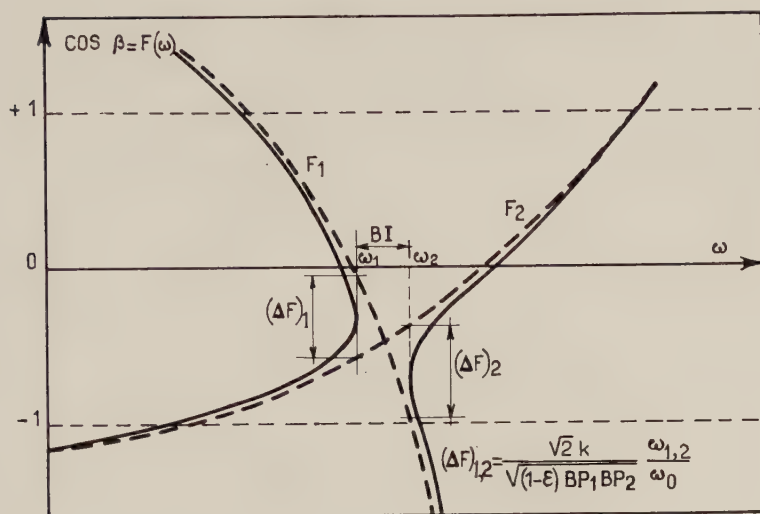


Fig. 5. — Construction géométrique de $F(\omega)$ lorsque les quadripôles constitutants sont de types différents.

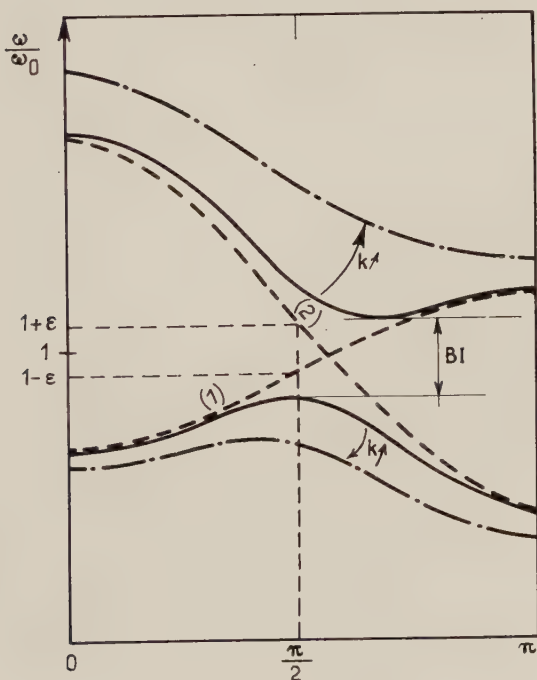


Fig. 6. — Courbes de dispersion correspondant au cas de la figure 5.

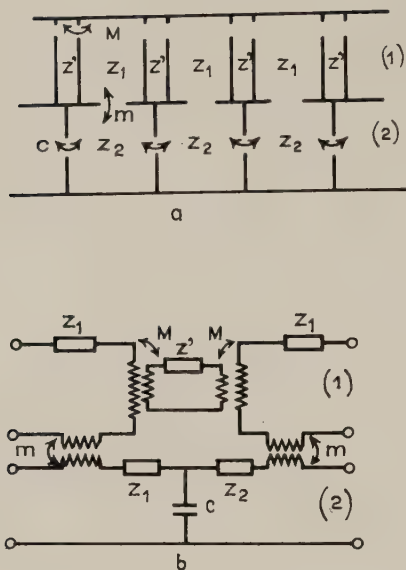


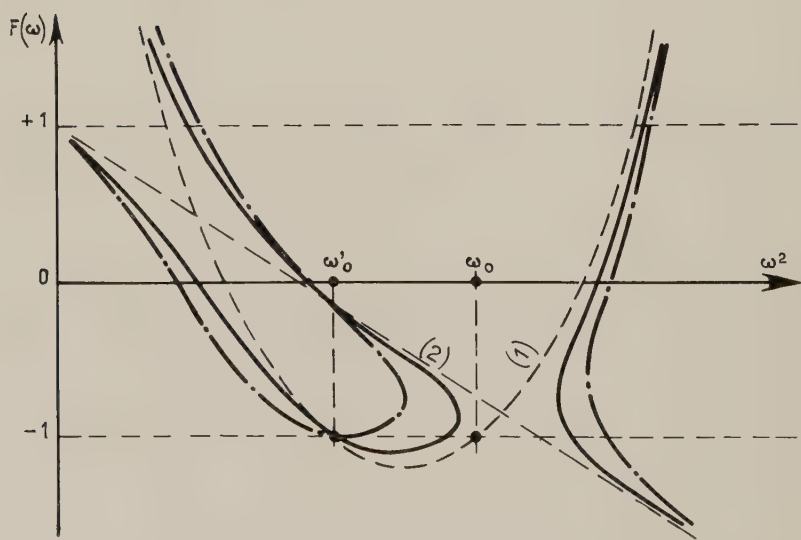
Fig. 7.

a. Représentation schématique de deux lignes couplées :

(1) Structure bipériodique à couplage magnétique;

(2) Structure monopériodique à couplage électrique.

b. Modèle à éléments localisés.

Fig. 8. — Construction géométrique de $F(\omega)$.

Cas de la figure 7.

Lorsque les deux quadripôles sont de types différents sans que les courbes de dispersion se coupent, on peut démontrer, en se servant de la relation (10), qu'il peut apparaître un extrêum sur l'une des branches de la courbe de dispersion, si le couplage m est assez important.

On a étudié le cas où les impédances de transfert $Z_{21}^{(1)}$ et $Z_{21}^{(2)}$ gardent le même signe, c'est-à-dire le cas où l'on considère deux structures mono-

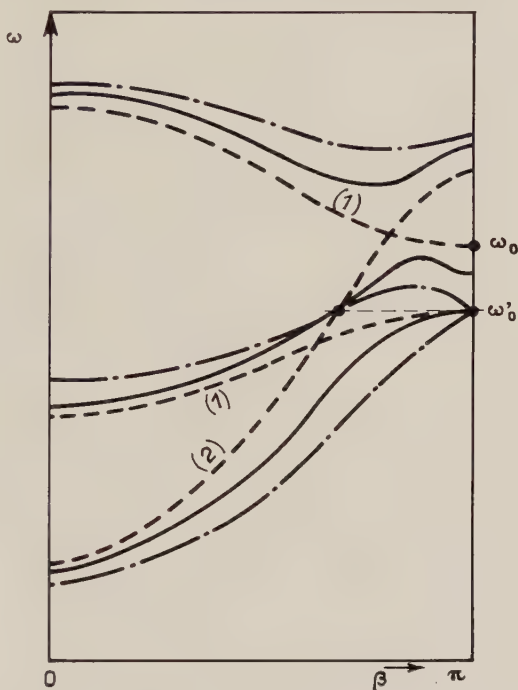


Fig. 9. — Courbes de dispersion de la structure tripériodique de la figure 7.
Cas $\omega'_0 < \omega_0$.

périodiques juxtaposées. Si l'une des structures est bipériodique par exemple, l'impédance de transfert correspondante sera du type résonnant.

Considérons donc la structure de la figure 7 *a* formée de deux lignes couplées, l'une bipériodique, l'autre monopériodique, l'ensemble constituant une ligne tripériodique. Le schéma équivalent est représenté sur la figure 7 *b*.

Le terme correctif provenant du couplage m entre quadripôles, figurant sous le signe radical de la relation (10), s'écrit

$$(12) \quad \Delta = -\Delta_0 \left(1 - \frac{\omega_0'^2}{\omega^2} \right)$$

et s'annule à la fréquence de résonance ω'_0 de la cavité de couplage.

La figure 8 montre la construction géométrique de la fonction résultante $F(\omega)$ à partir de $F_1(\omega)$, relation de dispersion du système bipériodique, et de $F_2(\omega)$, relation de dispersion du système monopériodique. Le cas considéré correspond au cas où $\omega'_0 < \omega_0$, ω_0 étant la fréquence de résonance de la cavité accélératrice du système bipériodique. La figure 9

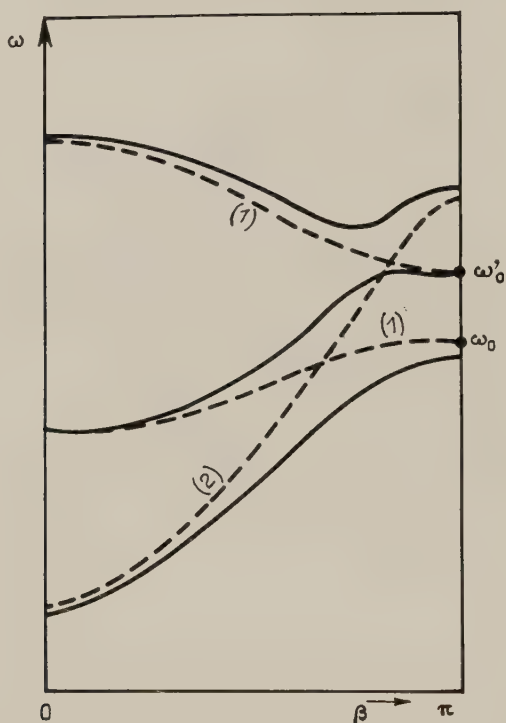


Fig. 10. — Courbe de dispersion de la structure tripériodique de la figure 7.

Cas $\omega'_0 > \omega_0$.

représente la courbe de dispersion de l'ensemble (courbes en trait plein). On voit que, quel que soit le couplage m , $F(\omega)$ passe toujours par deux mêmes points, à la pulsation ω'_0 . On observe l'apparition d'une bande interdite et on s'aperçoit que, pour une certaine valeur de m assez grande, les deux branches de dispersion inférieures se rejoignent à la pulsation ω'_0 avec une vitesse de groupe finie (courbes en traits mixtes). Lorsque $\omega'_0 > \omega_0$ par contre, ces deux branches ne peuvent se rejoindre, comme le montre la situation de la figure 10.

3. STRUCTURES BI ET TRIPÉRIODIQUES.

On peut caractériser la sensibilité aux erreurs mécaniques d'une structure, au point de vue de la régularité de champ, par le coefficient d'amplification d'Alvarez

$$(13) \quad A_n = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial \omega} \right)_n}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial E} \right)_n},$$

rapport entre la composante de Fourier de la variation de champ et celle de la perturbation de fréquence, qui en est la cause. Ce coefficient dépend de la courbure de la courbe de dispersion au point de fonctionnement ([13], [14]). Il est, en particulier, proportionnel à $\left(\frac{L}{n\lambda} \right)^2$ aux modes de coupure où la vitesse de groupe est nulle et à $\frac{L}{n\lambda}$ au milieu de la bande passante où la vitesse de groupe est maximale, L étant la longueur de la cavité, λ la longueur d'onde. La séparation des modes, étant proportionnelle à la pente de la courbe de dispersion, joue donc un rôle important sur la sensibilité aux erreurs mécaniques; elle limite pratiquement la longueur de la structure.

Or, l'avantage essentiel des structures multipériodiques est qu'elles nous rendent maître de la distribution des modes au voisinage du point de fonctionnement sur la courbe de dispersion. Le cas typique est celui de la structure Alvarez fonctionnant normalement au mode zéro (ou 2π) avec une vitesse de groupe nulle. L'introduction des supports résonnants ([15], [16], [17]) permet de modifier la distribution des modes par le couplage résonnant entre le mode TM de la structure initiale et le mode TEM des supports introduits. Si tous les supports de tubes de glissement participent à cet effet, on a affaire à une structure bipériodique, une période (ou une cellule) comportant en effet deux éléments résonnants. Un tel système fonctionne avantageusement au mode zéro (ou 2π), car, sur ce mode, un court-circuit bien placé permet d'interdire l'onde TEM des tiges, qui, par contre, agissent sur les modes voisins pour redresser la courbe de dispersion. On évite de cette façon, au maximum, les pertes sur les supports. Comme les supports résonnants ne doivent pas être identiques dans une structure à pas variable et nécessitent de ce fait un réglage de fréquence individuel, on a intérêt à réduire leur nombre, en constituant, par exemple, une structure multipériodique d'ordre N , n'ayant qu'un support résonnant tous les N tubes de glissement. La séparation des modes sera alors évidemment plus faible.

On n'aborde pas dans cette présente étude toute cette large famille de structures multipériodiques. On se limite uniquement à une classe de structures dont le fonctionnement en structures multipériodiques permet

non seulement d'améliorer la séparation des modes mais également d'augmenter l'efficacité accélératrice. Il s'agit des structures à cavités successives dont le fonctionnement a été expliqué succinctement plus haut.

Pour comprendre la configuration de champs des figures 1 a et 1 b, dans le cas d'une structure bipériodique, il suffit d'imaginer une onde d'aller et une onde de retour qui, subissant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ en traversant chaque cavité, se combinent de façon à se contre-balancer exactement dans les petites cavités et à s'ajouter, par contre, dans les grandes. Il suffit, pour cela qu'une onde partant d'une petite cavité y revienne avec un déphasage d'un nombre impair de π , après réflexion sur le plan de terminaison. Cela revient à terminer la ligne par un plan de court-circuit au milieu d'une grande cavité.

Il en est de même pour une structure tripériodique : la configuration du champ de la figure 1 c est possible si l'onde subit un déphasage de 2π en traversant chaque période. Seulement les conditions de terminaison sont différentes. En effet, si la structure bipériodique admet un plan de symétrie dans chaque type de cavité, la structure tripériodique n'en admet qu'un, au milieu de la petite cavité où le champ devrait être nul. Ce plan ne peut donc convenir pour terminer la ligne, car il entraînerait un champ maximal dans cette cavité. Pour y établir un champ nul on doit utiliser une cavité de terminaison spéciale dont la fréquence de résonance est telle que l'onde subisse en la traversant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ avant de réfléchir sur le plan de court-circuit. En pratique, cette cavité de terminaison est constituée simplement d'un système d'accord comme le montre la figure 1 c.

3.1. Étude sur modèles à éléments localisés.

Pour représenter les propriétés dispersives d'une ligne accélératrice, un grand nombre de modèles pourrait être utilisé, car, comme on va le voir plus loin, une courbe de dispersion est déterminée uniquement par sa fréquence centrale et les divers couplages dont la complexité dépend de la forme de la courbe que l'on veut représenter. Or, plusieurs combinaisons de ces couplages sont souvent possibles et ce n'est que lorsqu'on veut représenter la ligne par rapport à un élément extérieur (couplage avec une source d'énergie extérieure ou avec un faisceau de particules, etc.) qu'on éprouve le besoin de choisir un modèle aussi proche que possible de la réalité. On va justifier ici le choix des modèles que l'on adoptera par la suite.

Considérons, pour fixer les idées, une structure à iris dont une cellule est représentée sur la figure 11 a. Appliquant l'équation de Maxwell :

$$(14) \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

au contour MNPQM, on obtient l'équation

$$(15) \quad V_z + (V_{t_2} - V_{t_1}) = V_M,$$

où V_z représente la tension due au champ électrique longitudinal E_z , V_{t_1} , V_{t_2} les tensions dues aux champs électriques radiaux sur les surfaces des trous de couplage et V_M la tension induite par le champ magnétique. A partir des tensions V du premier membre, on peut définir des capa-

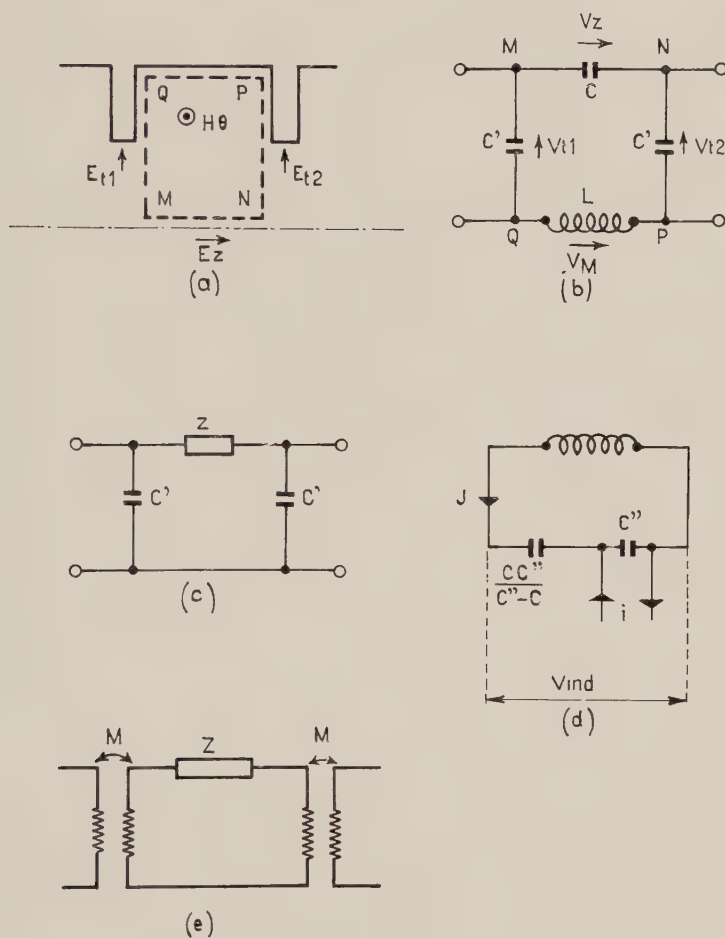


Fig. 11.

- a. Structure à iris;
- b. Représentation en éléments localisés;
- c. Modèle d'une structure à couplage électrique;
- d. L'effet d'un faisceau;
- e. Modèle d'une structure à couplage magnétique.

cités C telles que $C = \frac{q}{I}$, alors qu'à partir de V_M du second membre on peut définir une self-inductance L telle que $L = \frac{V_M}{I\omega}$, où q , la charge accumulée sur les conducteurs de la zone de champ électrique prépondérant et I , le courant total circulant sur les parois, sont liés par une équation de conservation $I = \frac{dq}{dt}$.

Il en résulte le circuit de la figure 11 *b* où chaque élément a un sens physique évident. Comme la matrice de transfert entre les paires de bornes MQ et NP ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont disposés les éléments C et L , on arrive au schéma de la figure 11 *c*, qui représente une période d'une structure monopériodique à couplage électrique.

De la relation (15) on peut déduire le sens de la courbe de dispersion. Au mode zéro, lorsque V_{t_1} et V_{t_2} sont en phase, $V_{t_1} = V_{t_2} = 0$, les effets de la capacité de couplage C' disparaissent : la fréquence du mode zéro est donc celle de l'impédance Z . Par contre, au mode π , $V_{t_1} - V_{t_2} = 2 V_{t_1}$, C' agit au maximum : la fréquence du mode π est donc plus grande. La courbe de dispersion est par conséquent ascendante.

Que se passe-t-il au passage d'un faisceau ? Si celui-ci est rectiligne et centré, seule une composante longitudinale de champ électrique est excitée. Si on le suppose en plus rigide, c'est-à-dire que sa forme et sa phase par rapport à un repère absolu (sa phase par rapport au champ accélérateur résultant peut se modifier) ne se trouvent affectées ni par le champ appliqué ni par le champ rayonné par le faisceau même, il peut être représenté par une source de courant d'impédance interne infinie appliquée aux bornes de la capacité C ou d'une fraction C'' de celle-ci, laquelle peut être déduite d'une mesure expérimentale d'impédance shunt de la ligne réelle. En effet, le schéma de la figure 11 *d*, représentant une cavité unique, permet de calculer la tension induite par le faisceau aux bornes de C :

$$(16) \quad V_{z_{\text{ind}}} = \frac{J}{jC\omega} = -\frac{i}{C''\omega} Q = -Z_{\text{sh}} \cdot i$$

si l'on définit $Z_{\text{sh}} = \frac{Q}{C''\omega}$, Q étant le coefficient de surtension. On retrouve la relation classique de la charge du faisceau.

Si le faisceau est rigoureusement longitudinal, les capacités C' n'interviennent pas directement.

La transposition de ce raisonnement au cas d'une ligne à couple magnétique est immédiate. Le rôle des capacités de couplage C' sera remplacé simplement par celui des inductances mutuelles : on arrive au schéma de la figure 11 *e*. On peut démontrer comme précédemment que la courbe de dispersion est descendante.

Les schémas *c* et *e* de la figure 11 constituent les éléments de base à partir desquels on construit les modèles de la figure 12.

La figure 12 *a* représente une structure bi ou tripériodique à couplage électrique (iris dans les zones de champ électrique prédominant). L'impédance Z_1 représente la cavité accélératrice; l'impédance Z_2 , la cavité de couplage de dimensions réduites et la capacité C' , l'iris de couplage.

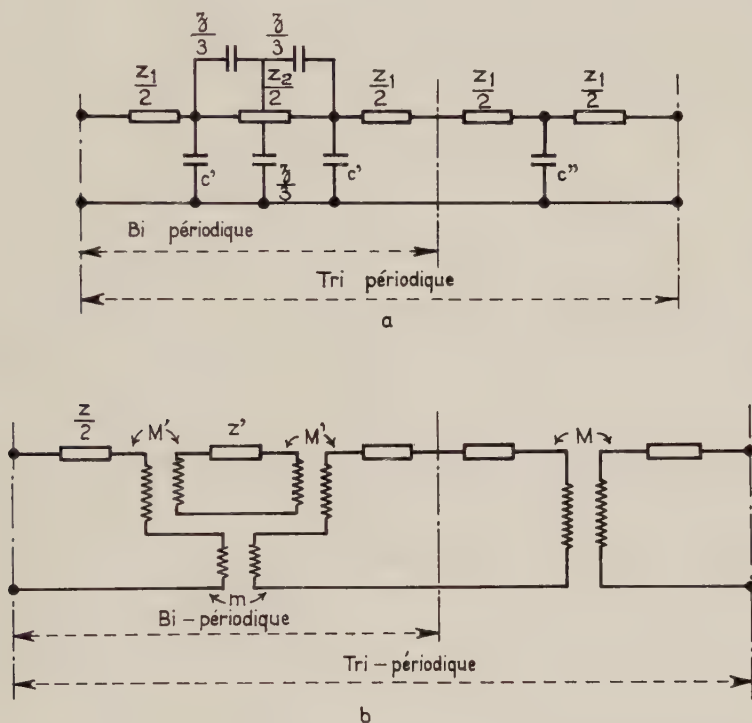


Fig. 12.

- a.* Modèle d'une structure bi ou tripériodique à couplage électrique;
b. Modèle d'une structure bi ou tripériodique à couplage magnétique.

Lorsque l'ouverture de l'iris est grande devant la longueur de la cavité de couplage, il peut exister un couplage électrique direct entre deux cavités accélératrices non adjacentes, couplage que l'on représente par l'impédance z . Dans le cas d'une structure tripériodique, C'' représente l'iris séparant les deux cavités accélératrices adjacentes supposées identiques.

La figure 12 *b* représente une structure bi ou tripériodique à couplage magnétique (iris de couplage dans les zones de champ magnétique prédominant). Les impédances Z_1 et Z_2 représentent respectivement la cavité accélératrice et la cavité de couplage; M' , leur inductance mutuelle

de couplage; M , celle des cavités accélératrices adjacentes de la structure tripériodique, qu'on suppose identiques. Lorsque l'ouverture de l'iris est grande devant l'épaisseur de la cavité de couplage, il peut exister un couplage magnétique direct entre deux cavités accélératrices non adjacentes, couplage que l'on représente par une inductance mutuelle m .

L'examen de la trace de la matrice de transfert de ces quadrupôles permet d'étudier les courbes de dispersion de chaque type de structure.

Pour une structure bipériodique à couplage électrique et lorsqu'on néglige le couplage direct entre les cavités accélératrices, la relation de dispersion s'écrit

$$(17) \quad F_{C2} = -1 + K_1 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2} \right),$$

où $\omega_{1, \frac{\pi}{2}}$ et $\omega_{2, \frac{\pi}{2}}$ sont respectivement les pulsations du mode $\frac{\pi}{2}$ lorsque la ligne est constituée uniquement de cavités identiques, soit du type des cavités accélératrices, soit du type des cavités de couplage. La courbe $F_{C2}(\omega^2)$ coupe l'ordonnée $F = -1$ aux pulsations $\omega_{1, \frac{\pi}{2}}$ et $\omega_{2, \frac{\pi}{2}}$.

Il existe donc deux bandes passantes de sens contraire, séparées au mode π par une bande interdite, laquelle disparaît lorsque deux types de cavités résonnent à la même fréquence; la vitesse de groupe est alors finie et égale à $(2\sqrt{2}K_c)^{-1}$.

Pour une structure bipériodique à couplage magnétique, la relation de dispersion s'écrit

$$(18) \quad F_{M2} = -1 + \frac{1}{2K'} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2} \right) \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2} \right),$$

K' étant le coefficient de couplage magnétique entre les cavités successives et défini par

$$(19) \quad K' = \frac{2M'}{\sqrt{L_1 L_2}},$$

L_1 et L_2 étant respectivement les inductances propres de la cavité accélératrice et de la cavité de couplage. On s'aperçoit que (18) s'obtient à partir de (17) en inversant le terme $\frac{\omega}{\omega_{\frac{\pi}{2}}}$. Comme précédemment, il peut

exister une bande interdite au mode π , laquelle disparaît lorsque les deux types de cavités ont la même fréquence de résonance. La vitesse de groupe est alors finie.

Lorsqu'on tient compte du couplage direct entre les cavités accélératrices non adjacentes, les relations (17) et (18) deviennent respectivement

$$(17') \quad F'_{C2} = \frac{1}{1 + \frac{Z'}{Z}} \left\{ F_{C2} + \frac{2}{Z} \left[Z_1 \left(1 + \frac{Z_2}{2Z'} \right) + \frac{Z_2}{2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{Z} + \frac{Z_1}{Z'} \right) \right] \right\};$$

$$(18') \quad F'_{M2} = \frac{F_{M2}}{1 + \frac{2k}{K'^2} \left(1 - \frac{\omega^2, \frac{\pi}{2}}{\omega^2} \right)},$$

où k est le coefficient du couplage magnétique direct défini par

$$(20) \quad k = \frac{2m}{L_1}.$$

Pour une structure tripériodique à couplage électrique la relation de dispersion s'écrit

$$(21) \quad F_{C3} = 1 + \left[\left(1 + \frac{Z_2}{Z'} \right) \left(1 + \frac{Z_1}{Z'} \right) - 1 \right] \left(2 + \frac{Z'}{Z''} + \frac{Z_2}{Z''} \right),$$

soit

$$(22) \quad F_{C3} = 1 + \left[-\frac{L_1 C'}{2} (\omega^2 - \omega_{01}^2) - L_2 C' (\omega^2 - \omega_{02}^2) + \frac{L_1 L_2 C'}{2} (\omega^2 - \omega_{01}^2) (\omega^2 - \omega_{02}^2) \right] \\ \times \left[2 + \frac{C''}{C} - C'' L_2 (\omega^2 - \omega_{02}^2) \right],$$

où ω_{01} et ω_{02} sont les pulsations propres des impédances Z_1 et Z_2 et où, pour simplifier l'écriture, on pose

$$Z' = \frac{1}{j C' \omega} \quad \text{et} \quad Z'' = \frac{1}{j C'' \omega_0}.$$

F_{C3} est une fonction paire de 6^e degré en ω : il existe donc trois branches de dispersion, séparées généralement par deux bandes interdites, l'une au mode π , l'autre au mode 2π et que l'on peut éliminer sous certaines conditions. En effet, au mode zéro (ou 2π), lorsque $F_{C3} = 1$, la bande interdite correspondante disparaît si l'équation $F_{C3}(\omega^2) - 1 = 0$ possède une racine double, c'est-à-dire si

$$(23) \quad \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{2}{C'} \left(1 + \frac{k_c}{2} \right) \right) = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'} \left(1 + \frac{2}{k_c} \right) \right),$$

où l'on pose $k_c = \frac{C''}{C}$, le rapport des couplages des deux sortes d'iris.

La condition (23) montre qu'il existe plusieurs façons d'éliminer la coupure, en agissant, soit sur les fréquences de résonance, soit sur le rapport des couplages, soit sur les deux à la fois.

En particulier, lorsque $k_c = 1$, la condition (23) devient

$$\frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{3}{C'} \right) = \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{3}{C'} \right),$$

soit

$$(23') \quad \omega_{1, \frac{2\pi}{3}} = \omega_{2, \frac{2\pi}{3}},$$

où $\omega_{1, \frac{2\pi}{3}}$ et $\omega_{2, \frac{2\pi}{3}}$ sont les pulsations du mode $\frac{2\pi}{3}$ d'une ligne constituée uniquement, soit des cavités accélératrices, soit des cavités de couplage. La condition (23') fournit donc une méthode pratique pour la détermination des dimensions des cavités.

De même, la bande interdite au mode π disparaît lorsque l'équation $F_{C3}(\omega^2) + 1 = 0$ admet une racine double, c'est-à-dire lorsque

$$(24) \quad \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C'} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{1}{L_1} \left(\frac{2 - k_c}{C'} + \frac{1}{C_1} \right).$$

En particulier, lorsque $k_c = 1$, la condition (24) devient

$$(24') \quad \omega_{1, \frac{\pi}{3}} = \omega_{2, \frac{\pi}{3}},$$

où $\omega_{\frac{\pi}{3}}$ est défini d'une façon analogue à $\omega_{\frac{2\pi}{3}}$.

Les relations (23') et (24') sont généralement incompatibles : pour éliminer les deux bandes interdites à la fois, il faudrait donc agir en même temps sur les fréquences et sur les couplages. Dans la pratique, cela n'est pas nécessaire, puisque le seul point de fonctionnement intéressant se trouve au mode 2π : l'existence d'une bande interdite au mode π n'altère pas, en effet, le régime permanent au mode 2π .

Pour une structure tripériodique à couplage magnétique, lorsqu'on néglige le couplage direct entre cavités accélératrices non adjacentes, la relation de dispersion s'écrit

$$(25) \quad F_{M3} = \frac{4}{KK'^2} \left(1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \lambda \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) - \frac{2}{K} \left(1 - \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) - \frac{K}{K'^2} \left(1 - \lambda \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right),$$

où

$$(26) \quad K = \frac{2M}{L_1}, \quad K' = \frac{2M'}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad \lambda = \frac{\omega_{02}^2}{\omega_{01}^2}.$$

Lorsque $\lambda = 1$, les deux bandes interdites disparaissent simultanément si $K = K'$. On voit ainsi que le modèle à couplage magnétique ne se comporte pas exactement de la même manière que le modèle à couplage électrique. Ce résultat s'explique par le fait que, dans le premier modèle, les inductances mutuelles M et M' , n'intervenant pas à la résonance des circuits, agissent de la même façon au mode π et au mode 2π .

En réalité, modifiant M , on modifie en même temps l'inductance propre du circuit.

En présence du couplage direct entre les cavités accélératrices non adjacentes, les relations de dispersions (21) et (25) deviennent respectivement :

$$(21') \quad F'_{C3} = \frac{1}{1 + \frac{Z_1}{Z_2}} \times \left\{ F_{C3} + \frac{2}{Z} \left[\left(1 + \frac{Z_2}{2Z''} \right) \left(Z_1 + Z_2 + \frac{3Z_1Z_2}{2Z'} + \frac{Z_1Z_2}{Z} \right) + \frac{Z_1Z_3}{Z''} \right] \right\},$$

$$(25') \quad F'_{M3} = \frac{1}{1 + \frac{2K}{K'^2} \left(1 - \lambda \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right)} \left\{ F_{M3} - \frac{2K}{K'} \left[1 + \frac{K}{K'^2} \left(1 - \lambda \frac{\omega_{01}^2}{\omega^2} \right) \right] \right\}.$$

Elles sont les quotients d'une fonction paire de 6^e degré en ω (ou $\frac{1}{\omega}$) et d'une fonction paire du second degré en ω (ou $\frac{1}{\omega}$). Le couplage direct modifie donc la courbe de dispersion dans son ensemble et, en particulier, la rend dissymétrique. Ceci est dû surtout à l'apparition de la fonction du second degré au dénominateur.

Pour obtenir les coefficients numériques figurés dans les expressions (17'), (18'), (21') et (25'), relations de dispersion sous des formes les plus générales des structures bi et tripériodiques, il suffit de déterminer les différents coefficients de couplage à partir de la mesure expérimentale de certaines fréquences particulières dont le nombre dépend de la complexité du modèle utilisé.

Considérons d'abord, par exemple, une structure bipériodique à couplage magnétique et soient ω_0 , ω_π et $\omega_{2\pi}$ les pulsations mesurées des modes zéro, π et 2π respectivement. Les paramètres de la relation de dispersion (18') sont définis alors par :

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2}{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2} + \frac{1}{\omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2} &= \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_\pi^2} + \frac{1}{\omega_{2\pi}^2}, \\ K'^2 &= \frac{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2 \left(\omega_0^2 - \omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2 \right) \left(\omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2 - \omega_{2\pi}^2 \right)}{4 \omega_0^2 \omega_{2\pi}^2 \omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2}, \\ k &= \frac{1}{4} \frac{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2 - \omega_\pi^2}{\omega_\pi^2}. \end{aligned} \right.$$

La connaissance de l'une des pulsations $\omega_{1, \frac{\pi}{2}}$ et $\omega_{2, \frac{\pi}{2}}$ permet de définir complètement les paramètres. Or, rappelons que $\omega_{2, \frac{\pi}{2}}$ est l'une des deux fréquences de la bande interdite au mode π , fréquence qui correspond

à la configuration de champ telle que le champ dans les cavités de couplage est maximal. Pour l'exciter, il suffit donc de terminer la ligne par un plan de court-circuit au milieu de l'une de ces cavités.

Le cas d'une structure tripériodique peut être traité de la même façon. En connaissant expérimentalement, par exemple, les pulsations $\frac{\omega\pi}{2}$, $\frac{\omega_3\pi}{2}$ et $\frac{\omega_5\pi}{2}$ des modes $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ respectivement, on peut déduire les paramètres K , K' , k , ω_{01} et λ figurant dans la relation de dispersion (25') (voir l'annexe II).

3.2. Études expérimentales.

Les études théoriques du chapitre précédent ont permis de prévoir les différents effets des paramètres d'une ligne multipériodique. Il s'agit donc à présent de les vérifier sur des lignes réelles et de déterminer ainsi avec quelle exactitude les modèles proposés peuvent les représenter. En outre, comme les études sur les modèles à éléments localisés ne peuvent atteindre que les propriétés dispersives, les études expérimentales sont nécessaires pour l'examen des propriétés accélératrices qui, elles, dépendent de la forme exacte des cavités.

On étudie donc dans ce chapitre les courbes de dispersion de différents types de lignes réelles, les effets des paramètres sur leurs formes, les coefficients de surtension et l'impédance shunt. Il sera possible alors de comparer les possibilités de chaque type de ligne, fonctionnant, soit en ligne bipériodique, soit en ligne tripériodique.

3.2.1. DESCRIPTION DE DIFFÉRENTS TYPES DE LIGNES ÉTUDIÉES.

Trois types de lignes ont été étudiés (*fig. 13*).

Type I : Il s'agit de la structure à iris utilisée dans les accélérateurs linéaires à électrons. Une première série de lignes de forme aussi simple que possible permet de mettre en évidence les influences des paramètres, alors qu'une deuxième série, de fabrication très proche de la réalité, avec des cavités de formes étudiées, permet des mesures quantitatives et par conséquent des comparaisons valables.

Type II : Le type précédent, où le couplage essentiellement capacitif se fait par les trous d'iris, convient surtout à des fréquences très hautes. En basse fréquence, souvent le grand diamètre du trou de couplage, restant nécessaire pour une bonne séparation de modes, est devenu absolument inutile pour le passage du faisceau. C'est pour cette raison que dans la ligne du type II, le couplage sera magnétique et les trous seront par conséquent portés vers la paroi cylindrique. Un tube de glissement à la place de l'iris et ayant un trou de diamètre juste néces-

saire pour le passage du faisceau, isole les cavités les unes des autres et permet d'améliorer l'impédance shunt de la ligne.

Type III : On sait que le champ doit être nul dans les cavités de couplage. Or, dans les lignes des deux types précédents, le faisceau, en passant, y excite un champ et perturbe par conséquent le fonctionnement. Le type III est donc réalisé de manière à éviter cet inconvénient : en effet, le faisceau se trouve isolé à présent de la cavité de couplage.

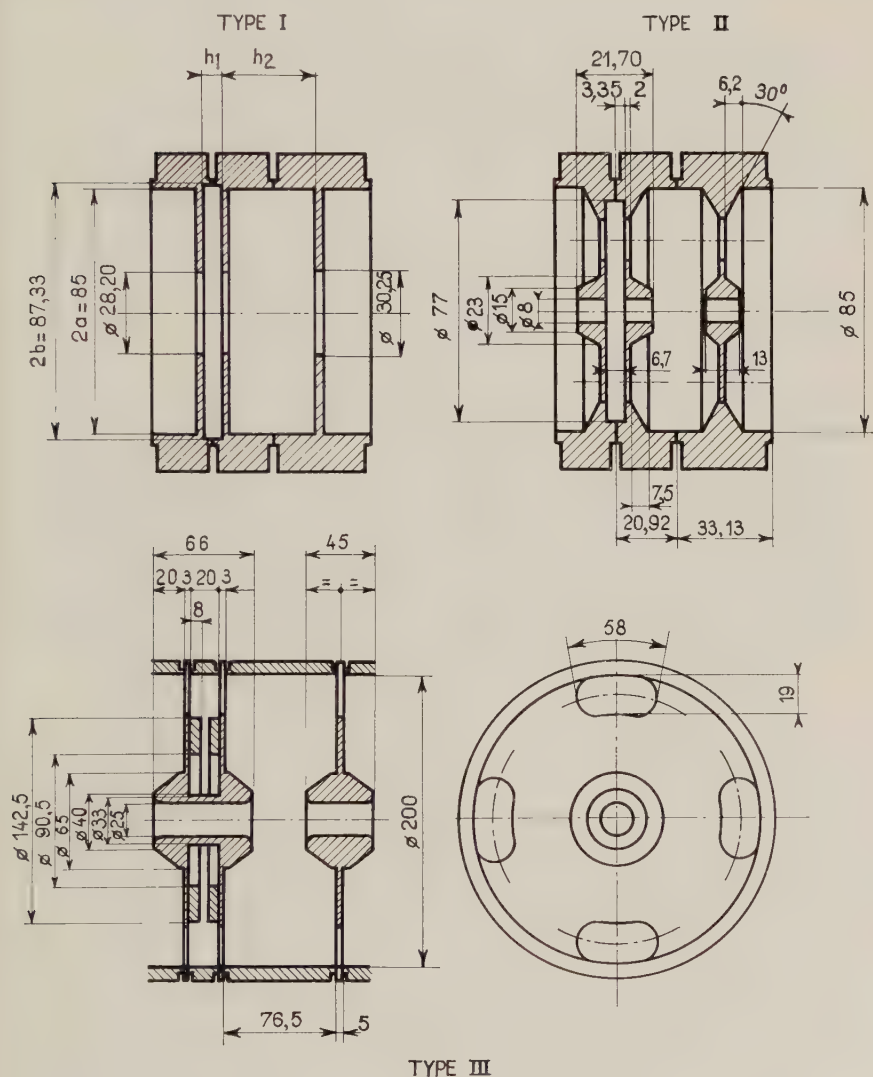


Fig. 13. — Les trois types de structure étudiés.

Celle-ci est de forme torique, avec des couronnes pour la mise en fréquence. Le couplage est inductif.

Les lignes expérimentales des deux premiers types fonctionnent vers 2,8 GHz et le troisième type vers 0,956 GHz.

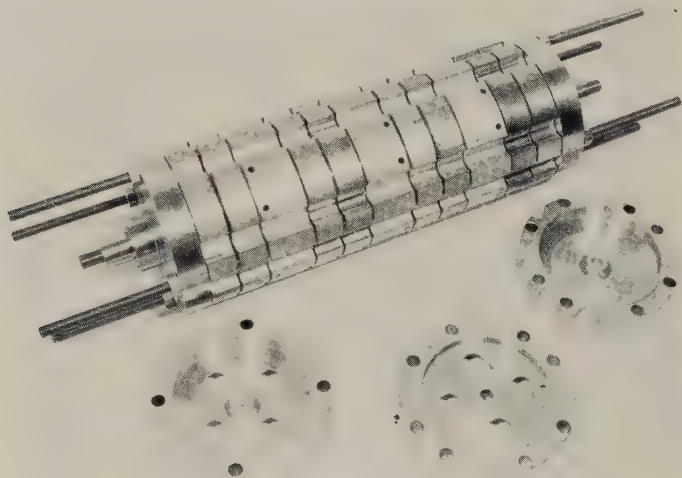


Fig. 14. — Structure tripériodique du type II.



Fig. 15. — Structure tripériodique du type III : éléments.

Les figures 14 et 15 montrent les photos des lignes du type II et du type III respectivement. La figure 16 montre une ligne du type III assemblée, de 1,05 m de long avec son banc de mesure.

3.2.2. CONFRONTATION DES COURBES DE DISPERSION THÉORIQUES ET EXPÉRIMENTALES.

On a établi les formes que doivent prendre les fonctions de dispersion dans différents cas. Afin de les déterminer quantitativement on se base

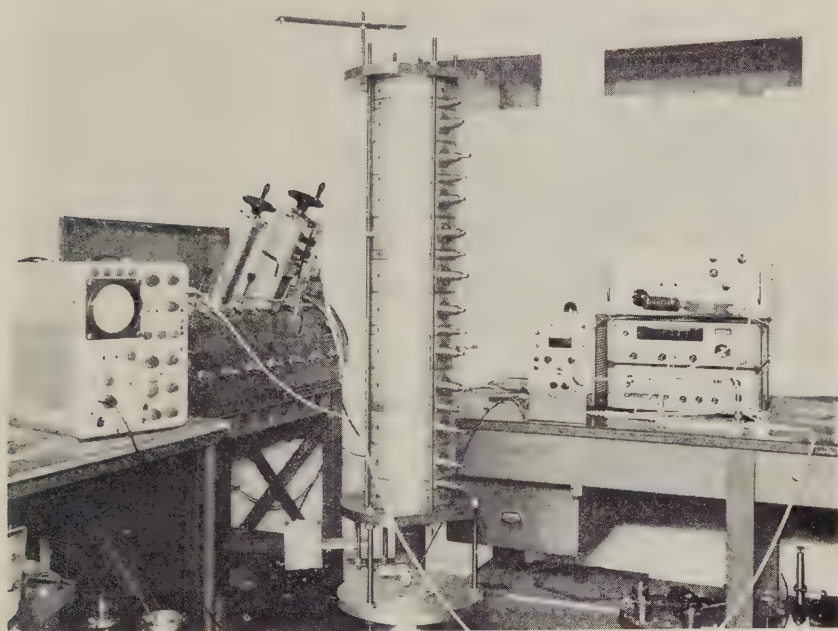


Fig. 16. — Structure tripériodique du type III : ligne assemblée.

sur quelques points de la courbe expérimentale pour déduire les paramètres principaux définis, dans le cas des structures à couplage magnétique, par la relation (27) pour les structures bipériodiques et par les relations (A. 4) à (A. 8) de l'annexe II pour les structures tripériodiques. Pour une ligne à couplage électrique, on obtient des résultats analogues.

La figure 17 montre les courbes de dispersion d'une structure bipériodique du type I. La première, en pointillés, correspond au cas où on néglige le couplage entre cavités non adjacentes. On voit que cette hypothèse est mauvaise, ce qui n'a rien d'étonnant car le diamètre des trous de couplage est nettement plus important que l'épaisseur de la cavité de couplage. Par contre, la courbe en trait plein, où ce couplage a été tenu compte, montre un bon accord entre la théorie et l'expérience.

ceci, bien entendu, tant que le diamètre des trous reste inférieur à la hauteur des cavités accélératrices.

La courbe théorique en trait plein a été obtenue à partir de la relation théorique :

$$(28) \quad \cos \beta = \frac{(f^2 - 7,5186)(f^2 - 8,094)}{0,5663 + 0,01618 f^2},$$

où la fréquence f est en gigahertz.

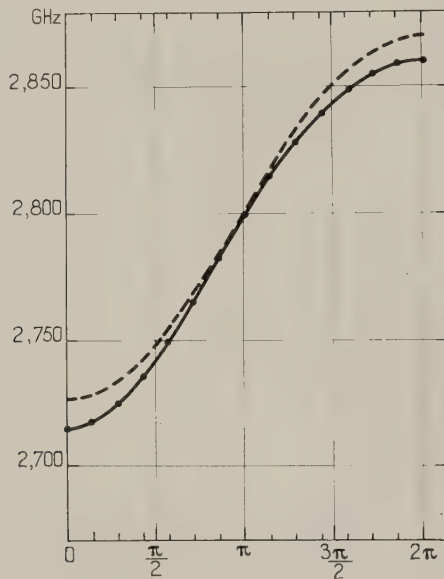


Fig. 17. — Courbe de dispersion d'une structure bipériodique du type I.
 — Courbe théorique, compte tenu du couplage direct entre les cavités non adjacentes;
 - - - Courbe théorique sans couplage direct.

$$\begin{aligned} 2a &= 85 \text{ mm}; \quad 2b = 89,63 \text{ mm}; \quad h_1 = 10,7 \text{ mm}; \quad h_2 = 33,33 \text{ mm}; \\ 2c_1 &= 28,20 \text{ mm}; \quad e = 3 \text{ mm}. \end{aligned}$$

La figure 18 montre les courbes de dispersion expérimentales d'une structure tri périodique du même type. On y remarque, comme le prévoit la relation (23), l'effet du couplage entre les cavités accélératrices sur les bandes interdites. En particulier, pour un diamètre de trou de 30,3 mm, la bande interdite disparaît au mode 2π (cas 3 de la figure). On remarque que l'une des fréquences des deux bandes interdites reste inchangée.

La figure 19 montre la courbe de dispersion d'une structure tri-périodique du type II. La bande interdite au mode 2π a été éliminée en agissant sur le rapport des fréquences de résonance des deux types de cavités, les couplages étant gardés partout les mêmes.

Ces deux exemples illustrent les deux possibilités de réglage prévues par la théorie du chapitre précédent.

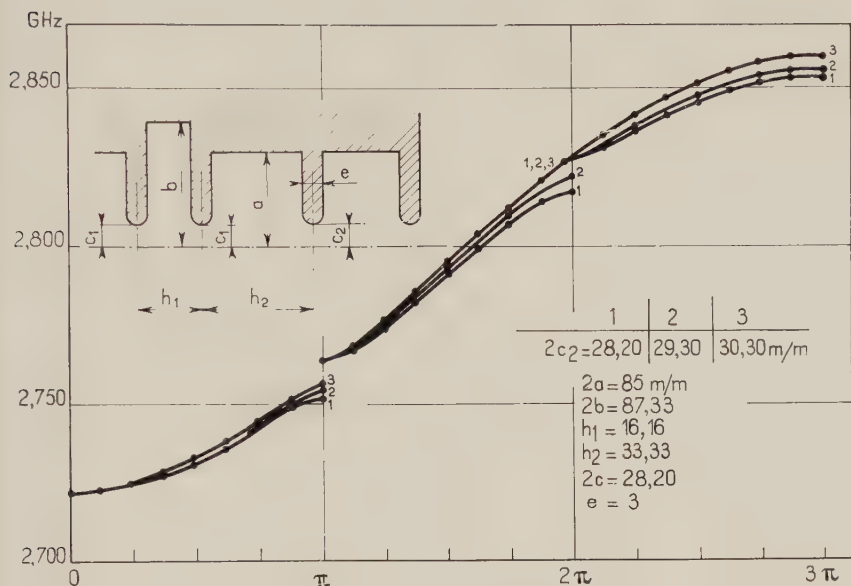


Fig. 18. — Courbe de dispersion d'une structure tripériodique du type I : effet des couplages sur les bandes interdites.

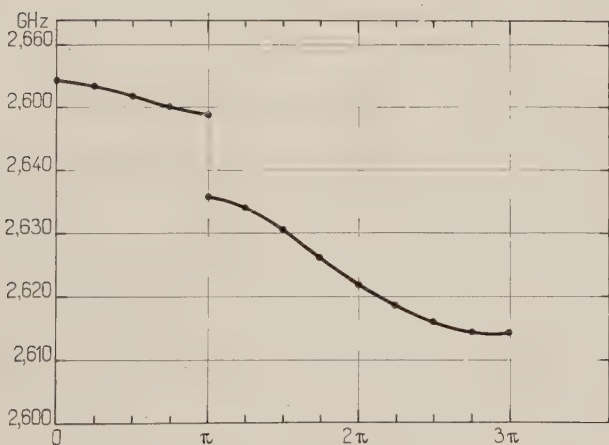


Fig. 19. — Courbe de dispersion d'une structure tripériodique du type II : la bande interdite au mode 2π éliminée en agissant sur le rapport de fréquences de résonance des cavités, les couplages étant partout les mêmes.

La figure 20 montre la courbe de dispersion d'une structure bipériodique du type III, où la bande interdite au mode π a été éliminée. L'expression analytique a été déduite de la relation (18') avec les valeurs des coefficients de couplage k , K' et des fréquences $F_0(\omega_{1, \frac{\pi}{2}})$ et $F'_0(\omega_{2, \frac{\pi}{2}})$ définis par les relations (27). On remarque l'effet du couplage direct k , qui tend à aplatir la courbe au voisinage du mode 2π .

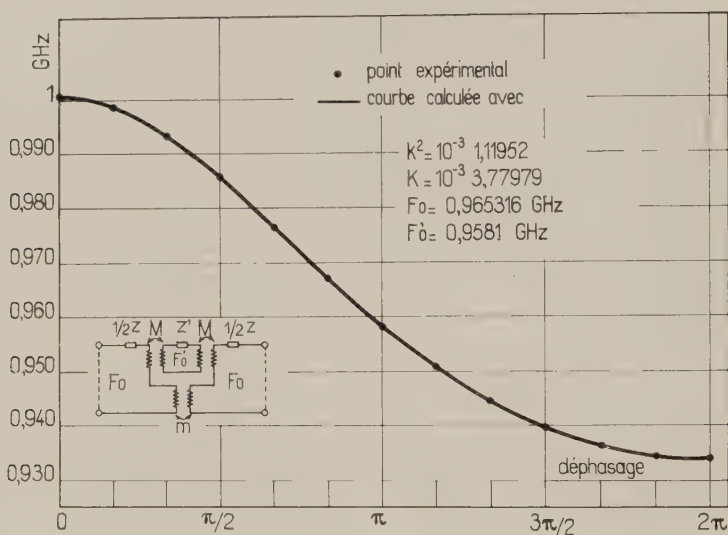


Fig. 20. — Courbe de dispersion d'une structure bipériodique du type III. La bande interdite au mode π éliminée en agissant sur le rapport des fréquences de résonance.

La figure 21 montre la courbe de dispersion d'une structure tri-périodique du type III, constituée à partir des mêmes cavités que celles de la structure bipériodique précédente. Le rapport des fréquences de résonance étant conservé, on a agi sur le rapport des couplages pour éliminer la bande interdite au mode 2π . Pour obtenir la courbe de dispersion théorique, on utilise les paramètres K , K' , k , λ , F_0 et F'_0 obtenus par la résolution de l'équation (A.8) de l'annexe II.

Rappelons que, pour obtenir les deux limites de chaque bande interdite, il suffit de changer les conditions de terminaison.

Comme on peut le voir, l'accord entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques basés sur les modèles proposés est excellent.

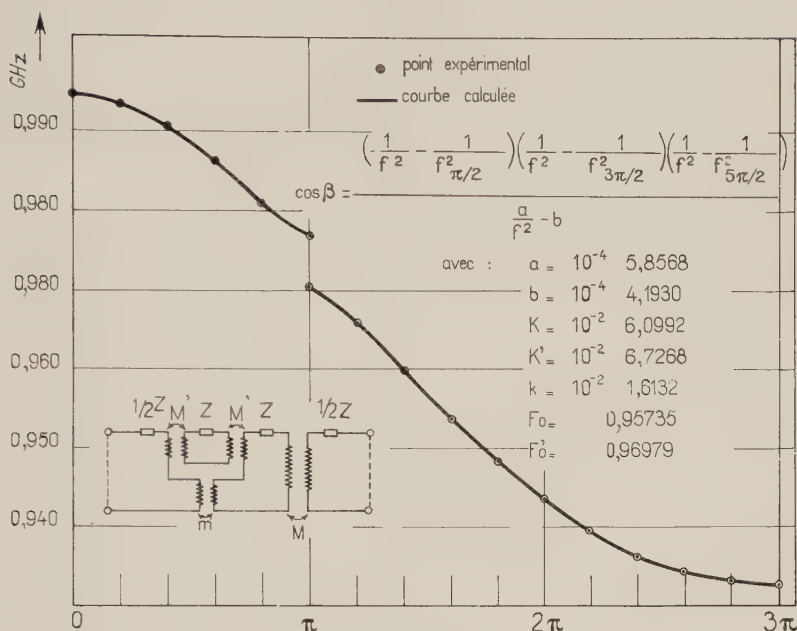


Fig. 21. — Courbe de dispersion d'une structure triperiodique du type III. La bande interdite au mode 2π éliminée en agissant sur le rapport des couplages, le rapport des fréquences étant celui de la figure 20.

3.2.3. EFFICACITÉ DE DIFFÉRENTS TYPES DE LIGNES.

Le tableau ci-dessous montre les résultats obtenus sur les trois types de lignes étudiées. Le paramètre $\beta = \frac{v}{c}$ désigne la vitesse réduite des particules, Q le coefficient de surtension de la ligne infinie (valeur ne tenant pas compte des pertes sur les plans de terminaison), Z_{eff} l'impédance shunt efficace, définie comme le rapport du carré du gain d'énergie par la puissance par unité de longueur de structure

$$(29) \quad Z_{eff} = \frac{\left[\frac{1}{L} \int_0^L E_z(z) \cos \frac{\omega}{v} z dz \right]^2}{\frac{P}{L}}$$

Le coefficient du temps de transit T est défini par le rapport du gain d'énergie par le champ moyen :

$$(30) \quad T = \frac{\int_0^L E_z(z) \cos \frac{\omega}{v} z dz}{\int_0^L E_z(z) dz}$$

TABLEAU.

Type.		h_1 (mm).	h_2 (mm).	$\beta = \frac{v}{c}$.	F (GHz).	Mode.	Q .	$\left(\frac{Z}{Q}\right)_{\text{eff}}$ (Ω/m).	T .	Z_{eff} ($M\Omega/\text{m}$).
I	1	13,7	30,3	0,787	2,83	TRI	11 300	2 000	0,815	22,66
		13,7	23,5	0,8	2,795	BI	9 850	1 930	0,86	19
	2	6,7	30,3	0,718	2,83	TRI	11 500	1 770	0,78	20,4
		6,7	25,3	0,71	2,796	BI	8 650	1 830	0,785	16
	3			1,0	2,840	BI	12 900	3 027	0,812	42
				1,0	2,810	TRI	16 000	2 760	0,763	44,2
II				0,65	2,618	TRI	13 000	5 290	0,848	68,77
				0,65	2,618	BI(*)				56,05
III				0,6	0,943	TRI	14 300	2 340	0,888	35,5

(*) Réf. [48].
 h_1 , longueur de la cavité de couplage; h_2 , longueur de la cavité accélératrice; l'épaisseur de l'iris des lignes du type I est de 3 mm.

Les structures du type I.1 et I.2 sont représentées par la figure 13. La structure I.3 en diffère légèrement : afin d'augmenter l'efficacité, on adopte des cavités ayant des pentes de 30° à la base des iris comme dans le cas de la structure du type II, l'épaisseur des iris est aussi plus faible (2 mm au lieu de 3 mm) ainsi que les trous de couplage (22 mm au lieu de 28,2 mm). Cela explique la différence des valeurs absolues de l'impédance shunt dans les deux cas.

On voit que, avec une périodicité triple, la structure du type I est intéressante tant qu'on s'arrange à garder le même temps de transit, c'est-à-dire en basse énergie. En haute énergie, par contre, la longueur

des cellules devenant importante, on a intérêt à utiliser des cavités de couplage de la même hauteur qu'en basse énergie de façon à profiter au maximum de l'espace pour l'accélération. Le temps de transit agit alors en défaveur de la structure tripériodique car, comme on le voit, le gain sur le coefficient de surtension se trouve contrebalancé par la perte sur le coefficient de temps de transit.

C'est pour cette raison que les types II et III conviennent mieux aux structures tripériodiques. La structure tripériodique du type II par exemple est excellente. Comparée à une structure bipériodique du

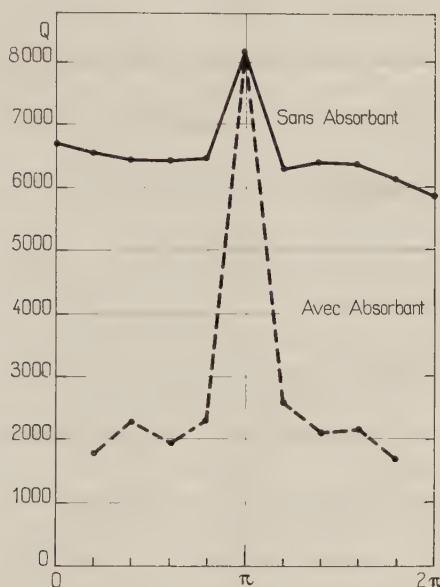


Fig. 22. — Effet d'absorbants sur le coefficient de surtension d'une structure bipériodique du type I.

même type mesurée par ailleurs [18], elle présente un gain net de 23 %. Quant à la structure du type III, malgré le nombre de contacts et malgré la forme assez loin de celle d'une structure idéale, elle reste assez efficace. Dans une structure réelle, la valeur du coefficient de surtension sera vraisemblablement meilleure.

3.3. Le problème du phénomène d'avalanche.

L'un des points faibles des structures multipériodiques à ondes stationnaires est le risque d'avalanche dû à l'émission secondaire dans les zones de champ faible des cavités de couplage. Pour combattre cet effet, certains auteurs cherchent à éviter des surfaces parallèles en donnant

aux iris des formes particulières. Cette solution, malgré la complication qu'elle entraîne dans la fabrication des cavités, semble nécessaire pour des structures supraconductrices. Par contre, dans le cas des structures fonctionnant à la température ambiante, il peut exister des solutions plus simples. Il est possible par exemple de déposer sur les parois des cavités de couplage une couche mince à base de carbone ayant un faible pouvoir émissif. Cette solution a été essayée et montre qu'une telle couche n'affecte pas d'une manière sensible le coefficient de surtension du mode fondamental alors que celui des modes voisins diminue considérablement. Ce résultat pourrait être exploité pour d'autres fins.

La figure 22 montre les résultats expérimentaux obtenus : les deux courbes, en trait plein et en pointillés, montrent l'évolution du coefficient de surtension de différents modes sous l'effet d'une couche de carbone déposée sur les parois des cavités de couplage.

3.4. Les modes défecteurs.

Le mode défecteur TM_{11} a été étudié sur chaque type de structure. Comme pour le mode accélérateur TM_{01} , on observe deux ou trois bandes passantes suivant que la structure fonctionne en ligne bi ou tripériodique.

Comme la fréquence de résonance des cavités de couplage et celle des cavités accélératrices sont bien séparées au mode TM_{11} , soit parce que les effets des trous de couplage ne sont pas les mêmes sur chaque type de cavité (cas des structures du type I), soit parce que ces cavités n'ont pas la même forme (cas des structures des types II et III), on observe des bandes interdites assez importantes. Quant aux bandes passantes, on peut observer, dans le cas d'une structure bipériodique, par exemple (le phénomène est le même dans le cas d'une structure tripériodique), une bande assez étroite appartenant aux cavités de couplages légèrement couplées entre elles à travers les cavités accélératrices, grâce au champ de débordement, et une bande relativement plus large appartenant aux cavités accélératrices assez bien couplées entre elles à travers les cavités de couplage de faibles dimensions.

Dans le cas des lignes du type I, la bande interdite n'étant pas très large ($\sim 3,2\%$), les deux bandes passantes restent encore assez importantes ($0,28$ et $1,75\%$).

Par contre, dans le cas des structures du type II et surtout dans celui des structures du type III, les deux bandes passantes sont très nettement séparées et, par conséquent, sont relativement étroites. On pourrait le réduire encore en plaçant les iris de couplage en quinconce de façon à annuler complètement le couplage entre cavités non adjacentes. Dans le cas d'une structure du type III par exemple, la bande interdite peut atteindre 33% , avec une bande passante inférieure pratiquement nulle et une bande passante supérieure qui descend de $2,5$ à $0,44\%$ lorsque

les trous de couplage sont placés en quinconce, arrêtant ainsi la propagation du mode déflecteur le long de la ligne : chaque cavité agit en effet dans ce cas comme une cavité isolée.

Ce résultat est intéressant, surtout pour la structure du type III, car par une manière simple, une telle structure non seulement permet d'éviter l'excitation directe des cavités de couplage par le faisceau, mais également permet d'écarter le danger du mode déflecteur.

4. CONCLUSION.

L'apparition de cette nouvelle catégorie de structures multipériodiques, dont on a donné un aperçu en étudiant deux types particuliers, constitue un progrès important dans la recherche de lignes à ondes lentes. Nos études dans ce domaine ont permis de proposer la structure tripériodique, et de mieux comprendre d'autres types de lignes multipériodiques d'applications diverses. Bien entendu, l'étude théorique a été surtout basée sur des modèles à éléments localisés. Cependant, avec la complexité grandissante des lignes accélératrices actuellement proposées, afin de satisfaire à des exigences de plus en plus ardues de la physique, l'utilisation de tels modèles semble un moyen tout à fait indiqué, par sa simplicité, sans pour autant diminuer la généralité des conclusions, ni trop nous éloigner de la réalité. La confrontation entre les études théoriques et expérimentales semble bien confirmer cette vue.

ANNEXE I

Soit le système de la figure 3 constitué de deux quadripôles couplés par deux inductances mutuelles m . Soient

$$(A.1) \quad [Z_1] = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(1)} & Z_{12}^{(1)} \\ Z_{21}^{(1)} & Z_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [Z_2] = \begin{bmatrix} Z_{11}^{(2)} & Z_{12}^{(2)} \\ Z_{21}^{(2)} & Z_{22}^{(2)} \end{bmatrix}$$

les matrices d'impédance respectives et posons $\mu = jm\omega$. La matrice de transfert M d'un tel système s'écrit

$$(A.2) \quad M = \begin{bmatrix} \frac{Z_{11}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)}} \frac{\mu}{Z_{21}^{(2)}} \frac{Z_{11}^{(1)} Z_{22}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)}} + \frac{\mu^2}{Z_{21}^{(2)}} - Z_{12}^{(1)} & \mu \left[\frac{Z_{11}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)}} + \frac{Z_{22}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)}} \right] \\ \frac{\mu}{Z_{21}^{(1)}} \frac{Z_{11}^{(2)}}{Z_{21}^{(2)}} & \mu \left[\frac{Z_{11}^{(2)}}{Z_{21}^{(2)}} + \frac{Z_{22}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)}} \right] \\ \frac{1}{Z_{21}^{(1)}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_{21}^{(2)}} \end{bmatrix}.$$

Soient $F_1(\omega)$ et $F_2(\omega)$ les fonctions de transfert des deux quadrupôles en absence du couplage m . On a

$$(A.3) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{Z_{11}^{(1)} + Z_{22}^{(1)}}{2Z_{21}^{(1)}} + \frac{Z_{11}^{(2)} + Z_{22}^{(2)}}{2Z_{21}^{(2)}} = F_1(\omega) + F_2(\omega), \\ 2 + B &= \left(\frac{Z_{11}^{(1)} \cdot Z_{11}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - \frac{\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} \right) + \frac{Z_{11}^{(2)} \cdot Z_{22}^{(1)}}{Z_{21}^{(2)} \cdot Z_{21}^{(1)}} \left(\frac{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{22}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - \frac{\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} \right) \\ &\quad + \frac{Z_{11}^{(1)} \cdot Z_{22}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} + \frac{Z_{11}^{(1)} \cdot Z_{22}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - \frac{1}{Z_{21}^{(1)}} \left[\frac{Z_{11}^{(1)} \cdot Z_{22}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} + \frac{\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - Z_{12}^{(1)} \right] \\ &\quad + \frac{Z_{11}^{(2)} \cdot Z_{22}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - \frac{1}{Z_{21}^{(2)}} \left[\frac{Z_{11}^{(2)} \cdot Z_{22}^{(2)}}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} + \frac{\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}} - Z_{12}^{(2)} \right]. \end{aligned} \right.$$

Supposons les deux quadrupôles symétriques, c'est-à-dire

$$(A.4) \quad Z_{11}^{(1)},^{(2)} = Z_{22}^{(1)},^{(2)},$$

et comme le système est réciproque, c'est-à-dire

$$(A.5) \quad Z_{12} = Z_{21},$$

on obtient finalement

$$(A.6) \quad A^2 - B = \left[\frac{Z_{11}^{(1)}}{Z_{21}^{(1)}} - \frac{Z_{11}^{(2)}}{Z_{21}^{(2)}} \right]^2 + \frac{4\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}},$$

soit

$$(A.7) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \left[F_1(\omega) + F_2(\omega) \pm \sqrt{(F_1(\omega) - F_2(\omega))^2 + \frac{4\mu^2}{Z_{21}^{(1)} \cdot Z_{21}^{(2)}}} \right].$$

Si l'on considère le cas simple où les deux quadrupôles sont respectivement de type à couplage magnétique ($Z_{12}^{(1)} = jM\omega$), et de type à couplage électrique ($Z_{12}^{(2)} = \frac{1}{jC\omega}$), (A.7) peut s'écrire explicitement

$$(A.8) \quad \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{BP_1} \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{u^2} \right) + \frac{1}{BP_2} \left(1 - \frac{u^2}{1-\varepsilon} \right) \right. \\ \left. \pm \sqrt{\left[\frac{1}{BP_1} \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{u^2} \right) - \frac{1}{BP_2} \left(1 - \frac{u^2}{1-\varepsilon} \right) \right]^2 - \frac{2k^2}{BP_1 \cdot BP_2} \frac{u^2}{1-\varepsilon}} \right]$$

en posant

$$(A.9) \quad \begin{cases} \omega_{01}^2 = \omega_0(1+\varepsilon), & \omega_{02}^2 = \omega_0(1-\varepsilon) \\ \text{et} & u = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad k = \frac{4m^2}{L_1 L_2}, \end{cases}$$

ω_{01} et ω_{02} étant les pulsations du mode $\frac{\pi}{2}$ des deux quadrupôles découplés, L_1 et L_2 étant les inductances propres de $Z_{11}^{(1)}$ et $Z_{11}^{(2)}$.

Lorsque $BP_1 = BP_2$ et lorsque $\varepsilon = 0$, la bande interdite est voisine de $\frac{1}{4}k$, dans l'approximation où $k \ll 1$, ce qui correspond à la plupart des cas pratiques.

ANNEXE II.

En posant

$$(A.1) \quad v = \frac{1}{\omega^2},$$

(25') s'écrit

$$(A.2) \quad \cos \beta = \frac{\left((1 - v \omega_{01}^2)^2 (1 - \lambda v \omega_{01}) - \frac{1}{2} K'^2 (1 - v \omega_{01}^2) \right) - \left(-\frac{1}{4} K^2 (1 - \lambda v \omega_{01}^2) - \frac{k^2}{4} (1 - \lambda v \omega_{01}^2) - \frac{k K'^2}{4} \right)}{\frac{k K'^2}{2} + \frac{k \lambda}{2} - \lambda \frac{k K}{2} v \omega_{01}^2},$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$(A.3) \quad \cos \beta = \frac{v^3 - A v^2 + B v - c}{a v - b} = \frac{(v - v_1)(v - v_2)(v - v_3)}{a v - b},$$

avec

$$(A.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{k K}{2 \omega_0^4}; \quad v_1 = \omega_{\frac{\pi}{2}}^{-2}; \quad v_2 = \omega_{\frac{3\pi}{2}}^{-2}; \quad v_3 = \omega_{\frac{5\pi}{2}}^{-2}; \\ b = \frac{1}{\lambda \omega_0^6} \left(\frac{K K'^2}{4} + \frac{k K}{2} \right), \\ A = \frac{1}{\omega_0^2} \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right), \\ B = \frac{1}{\lambda \omega_0^4} \left(2 + \lambda - \frac{1}{2} K'^2 - \frac{1}{4} \lambda K^2 - \frac{1}{4} \lambda k^2 \right), \\ C = \frac{1}{\lambda \omega_0^6} \left(1 - \frac{1}{2} K'^2 - \frac{1}{4} K^2 - \frac{1}{4} k^2 - \frac{k K'^2}{4} \right). \end{array} \right.$$

Or, les coefficients a , b , A , B et C sont connus expérimentalement par

$$(A.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = v_1 + v_2 + v_3, \\ B = \sum_{i \neq j} v_i v_j, \\ C = v_1 v_2 v_3, \\ a = \frac{\prod_i (v_0 - v_i) - \prod_i (v_{2\pi} - v_i)}{v_0 - v_{2\pi}}, \\ b = \frac{v_{2\pi} \prod_i (v_0 - v_i) - v_0 \prod_i (v_{2\pi} - v_i)}{v_0 - v_{2\pi}}. \end{array} \right.$$

A partir de (A.4) et (A.5), il s'agit de tirer les valeurs de K , K' , k , ω_0 et λ .

En éliminant K' , k et ω_0 de (A.4) on obtient deux équations en K :

$$(A.6.1) \quad \alpha K^4 + \beta K^2 + \gamma = 0;$$

$$(A.6.2) \quad \alpha' K^2 + \beta' K + \gamma' = 0,$$

où les coefficients sont exprimés en fonction de λ par

$$(A.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \lambda - 1, \\ \beta = 4 \left[\frac{\lambda}{A^2} B \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^2 - \frac{\lambda C}{A^3} \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^3 - (1 + \lambda) \right], \\ \gamma = \left[\frac{4a^2}{A^4} \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^4 \right] \left[\left(1 - \frac{4b}{aA} \right) \lambda + \left(1 - \frac{2b}{aA} \right) \right], \\ \alpha' = \frac{\lambda}{A^2} \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \left[B - \frac{C}{A} - \frac{2C}{A} \lambda \right] - 2, \\ \beta' = -2(\lambda - 1) \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{A^2} \left(\frac{b}{A} - a + \frac{2b}{A} \lambda \right), \\ \gamma' = -2a \frac{\lambda}{A^4} \left(2 + \frac{1}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{b}{A} - a + \frac{2b}{A} \lambda \right). \end{array} \right.$$

De (A.6.1) et (A.6.2) on tire deux fonctions $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ qui permettent de résoudre l'équation en λ

$$(A.8) \quad K_1(\lambda) = K_2(\lambda).$$

On en déduit ensuite de proche en proche les valeurs de K , ω_0 , k et K' .

La résolution de (A.8) peut se faire graphiquement.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] E. A. KNAPP, B. KNAPP, W. SHLAER et J. POTTER, 800 MHz RF structure, Los Alamos, EK/BK/WS/JP-1, 27 juillet 1964.
- [2] E. A. KNAPP, *Design, construction, and testing of RF structures for a proton linear accelerator (I.E.E.E. Trans. on nuclear Science, vol. N. S. 12, n° 3, 1965, p. 118).*
- [3] B. C. KNAPP, E. A. KNAPP, G. J. LUCAS et J. M. POTTER, *Resonantly coupled accelerating structures for high-current proton linacs (I.E.E.E. Trans. on nuclear Science, vol. N. S. 12, n° 3, 1965, p. 159).*
- [4] E. A. KNAPP, P. W. ALLISON, C. R. EMIGH, L. N. ENGEL, J. M. POTTER et W. J. SHLAER, *Accelerating structure research at Los Alamos (Proc. of the 1966 Linear Accelerator Conference, 3-7 octobre 1966, LA. 3609).*
- [5] S. GIORDANO, *Some new radio frequency accelerating structures (I.E.E.E. Trans. on nuclear Science, vol. N. S. 12, n° 3, 1965, p. 213).*
- [6] G. M. WHEELER et S. GIORDANO, *RF structures for linear accelerators (I.E.E.E. Trans. on nuclear Science, vol. N. S. 12, n° 3, 1965, p. 110).*

- [7] T. NISHIKAWA, S. GIORDANO et D. CARTER, *Dispersion relation and frequency characteristics of alternating periodic structure for linear accelerators* (R. S. I., vol. 37, n° 5, mai 1966).
- [8] D. T. TRAN, Institut de Recherches nucléaires de Strasbourg-Cronenbourg, W. R. 1678, décembre 1966; DAC. 4752, décembre 1967; DAC. 68.0549, septembre 1968.
- [9] B. EPZSTEIN et D. T. TRAN, *Triperiodic structure*, Proton linac conference, Brookhaven, mai 1968, DAC 68.0353.
- [10] B. EPZSTEIN et D. T. TRAN, *Structure tripériodique*, Colloque sur les méthodes expérimentales en Physique nucléaire et Physique des particules, Strasbourg, 4-6 décembre 1968.
- [11] TRAN DUC TIEN, *thèse*, Faculté des Sciences d'Orsay, C.N.R.S., A. O. 3197, mai 1969.
- [12] TRAN DUC TIEN, Institut de Recherches nucléaires de Lyon, Rapport interne LYCEN/6922, avril 1969.
- [13] LLOYD SMITH, *Linear Accelerators* (*Encyclopedia of Physics*, vol. 44, Springer, 1959, p. 341-388).
- [14] R. L. GLUCKSTERN, *Effect of errors in repetitive structures*, Minutes of the Conference of proton Linear Accelerators at Yale University, 21-25 octobre 1963.
- [15] S. GIORDANO, *A new multistem, drift-tube standing wave, zero-mode proton accelerating structure*, B. N. L. Accelerator Department, Internal Report AGSCD-7, février 1966.
- [16] D. A. SWENSON, E. A. KNAPP, J. M. POTTER et E. J. SHNEIDER, *Stabilization of the drift tube linac by operation in the $\frac{\pi}{2}$ cavity mode*, VIth International Conference on High Energy Accelerators, Cambridge, Mass., U.S.A., 11-15 septembre 1967.
- [17] G. DÔME et I. WHITE, *A general theory of multistem drift tube structures proposed for proton linacs*, VIth International Conference on High Energy Accelerators, Cambridge, Mass., U.S.A., 1967.
- [18] INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE KERNPHYSIK, Karlsruhe, *Studie über einen Supraleitenden Protonen Linearbeschleuniger um GeV Bereich*, (juillet 1967, p. 77).

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55

179800-69

Imprimé en France

UNE APPROCHE DE CALCUL
DE LA CHARGE DE FAISCEAU
DANS UNE LIGNE ACCÉLÉRATRICE
EN RÉGIME PERMANENT
ET EN RÉGIME TRANSITOIRE

PAR TRAN DUC TIEN,
Division « Accélérateurs » de THOMSON-CSF.

Extrait de la *Revue Technique THOMSON-CSF*
Vol. 1, n° 3, septembre 1969.

UNE APPROCHE DE CALCUL DE LA CHARGE DE FAISCEAU DANS UNE LIGNE ACCÉLÉRATRICE EN RÉGIME PERMANENT ET EN RÉGIME TRANSITOIRE ⁽¹⁾

PAR TRAN DUC TIEN,

Division « Accélérateurs » de THOMSON-CSF.

SOMMAIRE. — *La recherche des structures en vue de l'accélération des protons de haute énergie ou des électrons de grande intensité a abouti à la proposition d'une nouvelle classe de structure accélératrice : les structures multipériodiques à ondes stationnaires.*

Dans un article précédent, on a entrepris une étude de ces structures au point de vue purement électromagnétique. On examine ici spécialement leur interaction avec le faisceau.

En régime permanent, on assimile jusqu'à présent une section accélératrice à une cavité unique. L'effet de la longueur de la section a été ainsi négligé. Ne considérant que la première harmonique du faisceau, cet effet va être étudié. Les conditions optimales d'adaptation en présence du faisceau seront également examinées.

Le régime transitoire sera traité sans approximations à partir des relations de dispersion établies à partir des modèles à éléments localisés.

On se limitera aux structures monopériodiques et bipériodiques.

SUMMARY. — *The study of structures for acceleration of high energy protons or high intensity electrons led to the definition of a new type of accelerating structure, i. e. the multiperiodic standing-wave structures.*

In a previous article, these structures were studied from a purely electromagnetic viewpoint. Their interaction with the beam is now examined.

Under steady-state conditions, an accelerating section has so far been assimilated to a single cavity. The influence of the section length has thus been done away with. Considering only the first harmonic of the beam,

⁽¹⁾ Manuscrit reçu le 9 septembre 1969.

Cet article recouvre en partie les travaux de la thèse de Doctorat ès Sciences physiques, soutenue le 7 mai 1969 à la Faculté des Sciences d'Orsay et enregistrée au C. N. R. S. sous le n° A. O. 3197.

this influence is being studied. So are the optimum conditions of adaptation in the presence of a beam.

Operation under transient conditions is dealt with further on, without approximation, from the dispersion functions drawn up from lumped-element models.

The study is limited to monopariodic and bipariodic structures.

INHALTSANGABE. — *Die Erforschung der Strukturen zur Beschleunigung von hochenergetischen Protonen bzw. Elektronenbündel grosser Dichte hat zu einem Vorschlag mit neuen Beschleunigerstrukturen geführt : die mehrfachperiodischen Strukturen mit Stehwellen.*

In einem ersten Aufsatz wurden diese Strukturen von rein elektromagnetischen Standpunkte untersucht. Hier wird besonders ihre Wechselwirkung mit dem Strahlenbündel betrachtet.

Im stationären Betrieb wurde bisher ein Beschleunigerabschnitt wie ein einziger Resonanzhohlraum betrachtet. Die Auswirkung der Länge des Abschnittes wird dabei vernachlässigt. Diese Auswirkung wird hier untersucht, wobei nur die 1. Oberwelle betrachtet wird. Die optimalen Anpassungsbedingungen bei Anwesenheit des Strahlenbündels werden ebenfalls untersucht.

Der Fall des transienten Betriebes wird streng ohne Näherung untersucht u. z. ausgehend von den Dispersionsbeziehungen, die an Modellen mit lokalisierten Schaltelementen aufgestellt wurden.

Die Untersuchung wird auf einfachperiodische und bi-periodische Strukturen beschränkt.

1. INTRODUCTION.

Dans un article précédent [1], on a traité les problèmes concernant les lignes accélératrices bi et tripériodiques, sur le plan purement électromagnétique. On s'est intéressé spécialement aux deux aspects essentiels, à savoir leur comportement vis-à-vis de la propagation des ondes (bande passante, vitesse de groupe, séparation de modes, etc.) et leur efficacité accélératrice sur le mode le plus intéressant (distribution de champ, coefficient de surtension, l'impédance shunt, etc.).

Dans cet article, on examinera spécialement le comportement d'une ligne accélératrice (limité au cas d'une structure bipériodique) vis-à-vis d'un faisceau de particules permanent, c'est-à-dire d'un faisceau ayant déjà une structure spatiale périodique, et aussi vis-à-vis d'un paquet unique de charge.

2. TYPES DE LIGNES ÉTUDIÉES.

On rappelle brièvement le principe de fonctionnement d'une ligne accélératrice résonnante bipériodique. On considère, pour fixer les idées, une ligne accélératrice à iris classique, adoptée généralement dans les accélérateurs linéaires à électrons (fig. 1). Les électrons, circulant sur

l'axe, sont accélérés par la composante longitudinale du champ électrique synchrone grâce à la puissance de haute fréquence se propageant le long de la ligne. Cette puissance s'atténue au fur et à mesure à cause de la perte de l'énergie communiquée aux électrons et à cause de la perte Joule sur les parois conductrices, et se dissipe sur une charge adaptée à la fin de la ligne. Avec une ligne résonnante, on peut penser pouvoir réutiliser cette partie de puissance perdue ainsi inutilement : par un court-

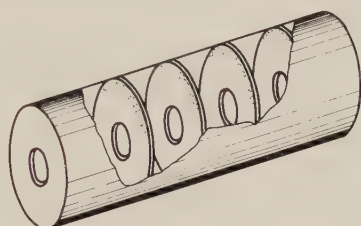


Fig. 1. — Structure à iris classique.

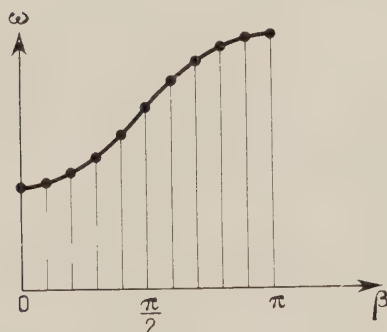


Fig. 2. — Courbe de dispersion $\omega(\beta)$ d'une structure monopériodique.

circuit placé à un endroit adéquat, on pourrait la faire réfléchir et s'arranger à faire participer l'onde réfléchie à l'accélération au même titre que l'onde incidente. Cette situation est réalisée, si la ligne fonctionne au mode π : les champs sont de même amplitude mais de phase opposée d'une cavité à l'autre. Malheureusement, à ce mode, comme le montre la courbe de dispersion de la figure 2, la vitesse de groupe est nulle, et lorsque la ligne comporte un grand nombre de cavités les modes sont serrés. La distribution de champ le long de la ligne devient alors extrêmement sensible à toute erreur mécanique. A ce point de vue, le mode $\frac{\pi}{2}$ est excellent; cependant, si le champ résultant est maximal dans une cavité où l'onde incidente et l'onde réfléchie s'additionnent, il est nul dans la cavité voisine où les deux ondes se retranchent : l'efficacité de la ligne

s'en trouve affectée. Pour minimiser cet inconvénient, il suffit de réduire la longueur d'une cavité sur deux, celle où le champ doit être nul. On constitue ainsi une structure (fig. 3) dénommée bipériodique, parce qu'une période géométrique comporte deux éléments résonnants. Le fonctionnement d'une telle ligne soulève un certain nombre de problèmes que l'on a discutés dans la référence [1] déjà citée. On fait seulement remarquer

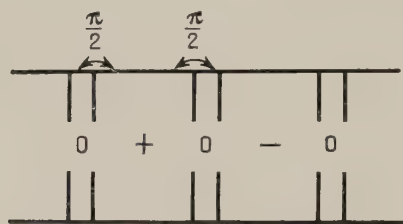


Fig. 3. — Schéma de principe d'une structure bipériodique à couplage électrique.

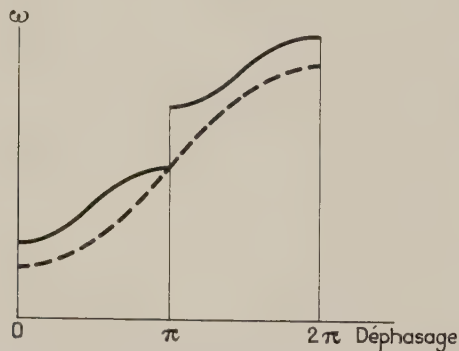


Fig. 4. — Courbe de dispersion d'une structure bipériodique.

- — — — — cas où il existe une bande interdite;
 - - - - - cas où la bande interdite est éliminée.

ici que, sans précautions préalables, la courbe de dispersion aurait une coupure au mode π comme le montre la courbe en trait plein de la figure 4 (on définit un mode par le déphasage subi par l'onde en traversant une période géométrique de la ligne) entraînant une mauvaise séparation de modes au point de fonctionnement. La situation illustrée par la courbe en pointillés de la figure 4 peut être néanmoins obtenue par un réglage adéquat des fréquences de résonance de chaque type de cavités.

Dans une ligne accélératrice bipériodique telle qu'elle est montrée schématiquement sur la figure 3, les iris servent de trous de couplage et aussi de passage du faisceau. La largeur de la bande passante est directement liée à leur diamètre. Lorsque, dans certaines applications (accélération de protons ou d'électrons de grande intensité), on est obligé de

baissier la fréquence, pour garder la même bande passante donc la même séparation de modes, on est amené à utiliser une ligne dont les trous sont nettement plus grands qu'il serait nécessaire pour le passage des particules. L'efficacité aussi sera, de ce fait, affectée. Aussi a-t-on intérêt à utiliser une ligne d'un autre type que l'on représente schématiquement sur la figure 5. On remarque d'abord que le champ électrique accélérateur sera mieux concentré au voisinage du faisceau grâce à la présence de tubes de glissement dont le trou peut être aussi petit que possible. Le couplage se fait par des trous prévus uniquement à cet effet, dans des zones de

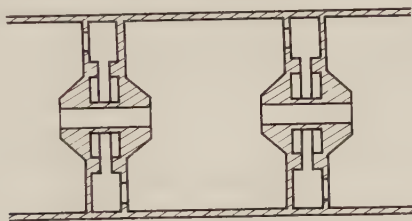


Fig. 5. — Exemple d'une structure bipériodique à couplage magnétique.

champ magnétique prédominant. La petite cavité de forme torrique, blindée du faisceau, permet d'éviter l'excitation directe par celui-ci, excitation qui pourrait perturber le fonctionnement correct de la ligne.

Dans cet article, on considère donc les deux types de lignes, l'une à couplage électrique (fig. 3), l'autre à couplage magnétique (fig. 5).

3. CHARGE DE FAISCEAU DANS UNE LIGNE BIPÉRIODIQUE EN RÉGIME PERMANENT.

3.1. Choix du modèle.

Considérons une ligne bipériodique fonctionnant au mode π . Le faisceau, en passant, induit dans chaque cavité une tension, soit par le couplage direct avec le champ électrique dans l'espace d'accélération, soit par l'intermédiaire du couplage entre cavités. Nous supposons par la suite que l'interaction directe entre le faisceau et l'onde n'existe que dans les cavités accélératrices, ce qui suppose que l'on isole préalablement les cavités de couplage de l'influence directe du faisceau et que, par conséquent, les signaux induits dans les cavités de couplage ne peuvent s'y établir que par le couplage magnétique des trous. Cela revient à considérer une ligne à couplage magnétique de la figure 5.

On prend comme circuit équivalent celui de la figure 6 où, par commodité de calcul, on définit une maille par celle limitée par les plans de symétrie des cavités accélératrices. Comme le régime est supposé permanent, le faisceau que nous supposons déjà groupé en paquets, existe le long

de la ligne et induit dans les cavités successives des signaux en opposition de phase. Le courant dans la $p^{\text{ième}}$ cavité aura donc la forme

$$(1) \quad i_p = (-1)^p J_0,$$

avec

$$|J_0| = I_c \left(\frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \right)$$

$\Delta\varphi$ étant l'extension en phase et I_c le courant crête. Si nous prenons comme origine de phase celle de la tension accélératrice, J_0 doit contenir un facteur de phase et est donc complexe.

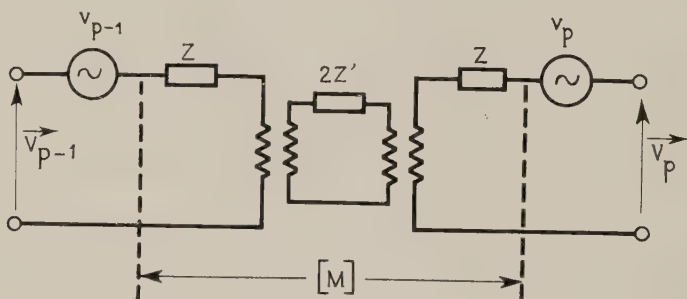


Fig. 6. — Schéma à éléments localisés d'une maille de structure (cas de la figure 5).

Équation de transfert. — Soit M la matrice de transfert d'une maille en absence du faisceau, on a

$$(2) \quad M = (-1) \begin{pmatrix} \text{ch } \alpha & \xi \text{ sh } \alpha \\ \frac{1}{\xi} \text{ sh } \alpha & \text{ch } \alpha \end{pmatrix},$$

en posant, en fonction des paramètres définis à la figure 6 :

$$(3) \quad \begin{cases} Z = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right); & Z' = R' + j \left(L'\omega - \frac{1}{C'\omega} \right); \\ Q = \frac{L\omega_0}{R}; & Q' = \frac{L'\omega'_0}{R'}; & \omega_0^2 = \omega'^2_0 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{L'C'}; \\ K = \frac{M^2}{LL'}; & \xi = -\frac{M^2\omega^2}{2R} \text{ sh } \alpha; & \text{ch } \alpha = 1 + \frac{2}{KQQ'}; \\ \mathbf{v}_p = (-1)^p \mathbf{v}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{avec } \mathbf{v}_0 = \frac{J_0}{jC\omega}. \end{cases}$$

L'équation de transfert d'une maille s'écrit :

$$(4) \quad \mathbf{v}_p - (-1)^p \mathbf{v}_0 = M[\mathbf{v}_{p-1} + (-1)^{p-1} \mathbf{v}_0]$$

soit

$$(5) \quad \begin{cases} \mathbf{V}_p = M \mathbf{V}_{p-1} - (-1)^p (M-1) \mathbf{V}_0, \\ \mathbf{V}_{p-1} = M^{-1} \mathbf{V}_p + (-1)^p M^{-1} (M-1) \mathbf{V}_0. \end{cases}$$

D'où, par récurrence :

$$(6a) \quad \mathbf{V}_p = M^p \mathbf{V}_0 - (-1)^p \mathbf{U}_p,$$

$$(6b) \quad \mathbf{V}_p = M^{p-N} \mathbf{V}_N + (-1)^p \mathbf{V}_p,$$

en désignant par la flèche inférieure le sens de transfert et en comptant les mailles de gauche à droite, N désignant le nombre total de mailles. $\mathbf{u}_p$ et $\mathbf{v}_p$ représentent les signaux induits dans la $p^{\text{ième}}$ cavité et provenant de la sommation des signaux issus respectivement de l'origine et de l'extrémité N . On a

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{U}_p = \sum_{q=0}^{p-1} (-1)^q M^q (M-1) \mathbf{V}_0 = -v_0 \coth \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\xi} (\operatorname{ch} p \alpha - 1) \right), \\ \mathbf{V}_p = \sum_{q=1}^{N-p} (-1)^q M^{-q} (M-1) \mathbf{V}_0 = -v_0 \coth \frac{\alpha}{2} \left(-\frac{1}{\xi} [\operatorname{ch} (N+1) \alpha - \operatorname{ch} \alpha] \right). \end{cases}$$

Conditions aux limites. — En régime d'onde stationnaire, la ligne est terminée par un plan de court-circuit à l'extrémité N . Une des conditions aux limites s'écrit donc $V_N = 0$, or d'après (6) :

$$(8) \quad \mathbf{V}_0 = M^{-N} \mathbf{V}_N + \mathbf{V}_0$$

soit

$$(9) \quad V_0 = -\xi \operatorname{th} N \alpha I_0 + (\mathcal{V}_{01} + \xi \operatorname{th} N \alpha \mathcal{V}_{02}).$$

Ainsi, vis-à-vis du circuit d'entrée, la présence du faisceau est équivalent à une force électromotrice,

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{V}_{01} - R_e \mathcal{V}_{02} \\ &= -2 v_0 \coth \frac{\alpha}{2} \frac{\operatorname{sh} \frac{N \alpha}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) \alpha}{\operatorname{ch} N \alpha} \end{aligned}$$

d'impédance interne

$$(11) \quad R_e = -\xi \operatorname{th} N \alpha.$$

On vérifie que lorsque la ligne est sans perte,

$$(12) \quad \mathcal{E} = -2 N v_0,$$

le facteur 2 provenant du fait que l'on a coupé la cellule par le milieu.

Les relations (10) et (11) constituent les conditions aux limites imposées par la nature de la terminaison de la ligne à l'extrémité N .

3.2. Conditions optimales d'adaptation de la source de puissance en présence du faisceau.

Précisons le problème. Supposons que l'on dispose d'une source de puissance P_0 , valeur maximale que nous puissions transmettre à la ligne, dans le meilleur des cas. Nous pouvons représenter cette source par une force électromotrice E d'impédance interne R_i telle que

$$(13) \quad P_0 = \frac{1}{8} \frac{E^2}{R_i}.$$

Cette représentation est arbitraire puisque E et R_i sont liés. Ce sont en fait des quantités ramenées à l'entrée de la ligne par l'intermédiaire du système de couplage. Les seules quantités ayant un sens physique sont la puissance P_0 , la tension accélératrice et la tension v_0 induite par le faisceau.

Ceci étant, la situation à l'entrée de la ligne peut être représentée par le schéma de la figure 7 qui exprime la condition de limite à l'entrée.

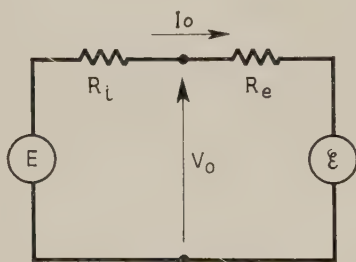


Fig. 7. — Condition à l'entrée de la ligne.

Le diagramme vectoriel de la figure 8 montre le processus du calcul développé dans la suite.

En absence du faisceau, $\varepsilon = 0$, la tension accélératrice aux bornes de la capacité C de la première période est donnée par

$$(14) \quad V_{\text{acc}} = \frac{E}{R_i + R_e} \frac{1}{jC\omega}.$$

L'optimum d'adaptation, c'est-à-dire le maximum de la puissance transmise est obtenue lorsque $R_i = R_e$.

L'apparition d'un courant J donne naissance à une tension induite v dans chaque période et par conséquent à une force électromotrice ε à l'origine qui s'oppose à la source E . Il en résulte une nouvelle tension accélératrice dont la valeur dépend de l'adaptation.

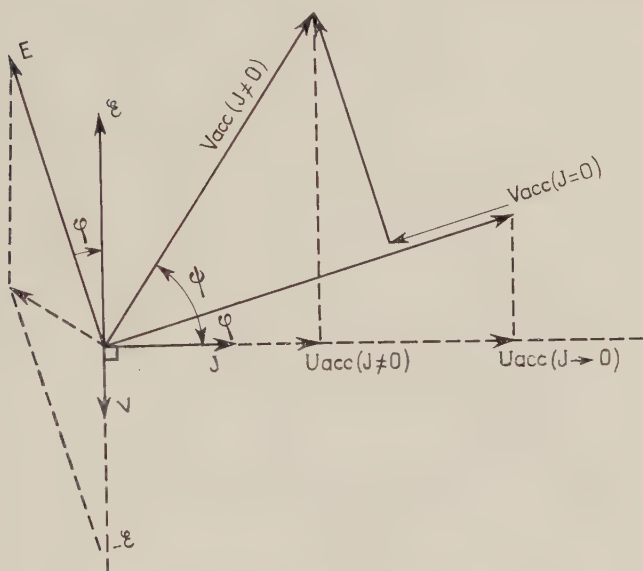


Fig. 8. — Diagramme vectoriel représentant les conditions à l'entrée de la ligne.

La puissance transmise s'écrit :

$$(15) \quad P_t = \frac{1}{2} V_0 I_0^*.$$

On se propose de trouver les conditions d'adaptation optimale. Ceci est obtenu lorsque la puissance transmise à la ligne est maximale, c'est-à-dire, normalement lorsque

$$(16 a) \quad \mathcal{J}_m(P_t) = 0,$$

$$(16 b) \quad \frac{\partial}{\partial R_i} \mathcal{R}_e(P_t) = 0,$$

relations dans lesquelles nous prenons la résistance interne R_i comme paramètre de réglage (par modification de la surface de la boucle par exemple).

La relation (16 a) a pour conséquence d'éliminer le déphasage entre les vecteurs $\mathbf{s}$ et $\mathbf{E}$ de la figure 8, ce qui entraîne le même effet pour le courant J et la tension accélératrice. Or la stabilité de la dynamique exige un certain déphasage entre les particules et le champ accélérateur. La relation (16 a) ne peut donc pas être *a priori* satisfaite.

L'optimum d'adaptation n'est donc conditionné que par la relation (16 b).

Choisissons comme origine de phase celle de E . Nous avons

$$(17) \quad \begin{cases} \mathcal{E} = |\mathcal{E}| e^{j\varphi} \\ v_0 = -|v_0| e^{j\varphi} \end{cases}$$

et

$$(18) \quad \begin{cases} I_0 = E \frac{x + u e^{j\varphi}}{1 + x} \\ I_0 = \frac{E}{R_l} \frac{1 - u e^{j\varphi}}{1 + x} \end{cases}$$

en posant

$$(19) \quad \begin{cases} x = \frac{R_c}{R_l} \\ u = \frac{|\mathcal{E}|}{E} = \mathcal{C} x^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathcal{C} = \frac{|\mathcal{E}|}{(8 R_c P_0)^{\frac{1}{2}}}$$

où $\mathcal{C}$ est une quantité liée uniquement au courant du faisceau et à la puissance d'entrée.

Il en résulte :

$$(20 a) \quad R_e P_t = \frac{4 P_0 [x + \sqrt{x(1-x)} \cos \varphi \mathcal{C} - x \mathcal{C}^2]}{(1+x)^2},$$

$$(20 b) \quad \frac{\partial}{\partial x} R_e P_t = \frac{4 P_0}{(1+x)^3} \left[(x-1) \mathcal{C}^2 + \frac{(x^2 + 6x + 1) \cos \varphi}{2\sqrt{x}} \mathcal{C} - x + 1 \right],$$

d'où la condition d'optimisation :

$$(21) \quad \mathcal{C} = \frac{\cos \varphi (x^2 - 6x + 1)}{4\sqrt{x(1-x)}} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi (x^2 - 6x + 1)^2}{16x(1-x)^2} + 1}$$

dont seule la valeur positive convient, d'après la définition de $\mathcal{C}$. En absence de faisceau $\mathcal{C} = 0$, alors $x = 1$ d'après (20 b), on retrouve le résultat classique.

Les figures 9 et 10 donnent les courbes $\mathcal{C}(x)$ et $u(x)$ permettant de déterminer la valeur optimale du couplage à partir du courant du faisceau, de sa phase et de la puissance appliquée. La partie de gauche ($x \leq 1$) des deux réseaux de courbes correspond aux valeurs positives de $\cos \varphi$, c'est-à-dire au cas où le faisceau se trouve à la phase accélératrice. Si r est la résistance caractéristique de la ligne d'alimentation et M l'inductance mutuelle de la boucle de couplage, on a

$$R_l = \frac{M^2 \omega^2}{r}.$$

Le fait que x doit être inférieur à l'unité en présence du faisceau signifie que l'on doit augmenter M , c'est-à-dire augmenter la surface de la boucle, r étant fixée une fois pour toute. La partie de droite ($x > 1$) correspond

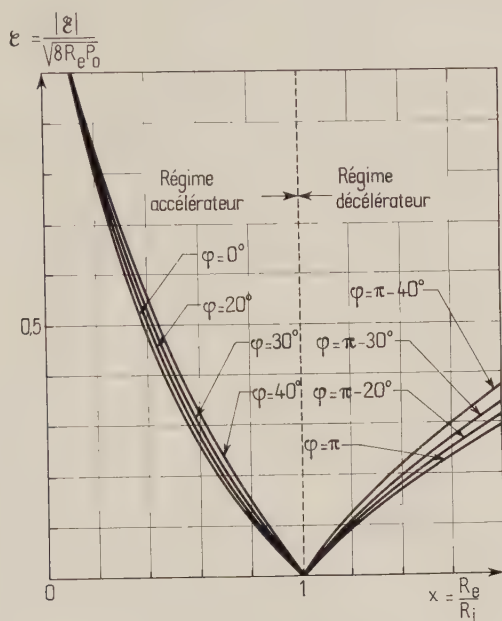


Fig. 9. — Courbe $c(x)$.

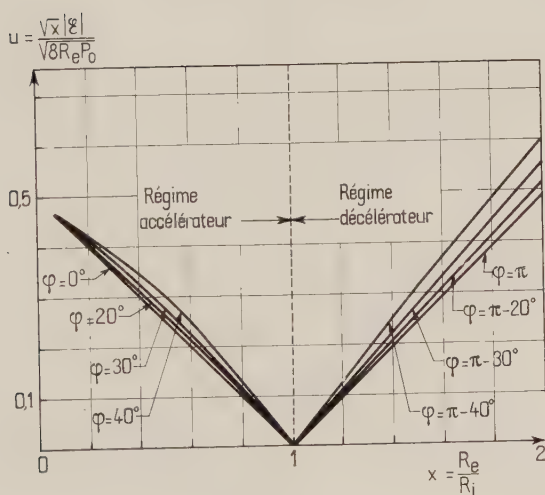


Fig. 10. — Courbe $u(x) = \sqrt{x} c(x)$.

par contre aux valeurs négatives de $\cos \varphi$, c'est-à-dire au cas où le faisceau se trouve à la phase décélétrice. Celui-ci cède alors de l'énergie et, pour le maximum de puissance transmise, il faut diminuer la surface de la boucle. Ce cas évidemment ne nous intéresse pas.

La partie imaginaire de la puissance transmise s'écrit :

$$\mathcal{J}_m(P_t) = 4 P_0 \frac{u \sin \varphi}{1+x}.$$

Pour l'annuler, il faut que φ soit nul comme nous l'avons signalé au début.

3.3. L'effet de la charge du faisceau dans une ligne adaptée pour l'optimum.

De (6 a) et (7), on tire

$$(22) \quad \mathbf{V}_p = (-1)^p \begin{bmatrix} \operatorname{ch} p\alpha & \xi \operatorname{sh} p\alpha \\ \frac{1}{\xi} \operatorname{sh} p\alpha & \operatorname{ch} p\alpha \end{bmatrix} \mathbf{V}_0 + (-1)^p v_0 \coth \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} \operatorname{sh} p\alpha \\ \frac{1}{\xi} (\operatorname{ch} p\alpha - 1) \end{bmatrix}$$

ou

$$(23) \quad V_{acc}(p) = \frac{I_p}{jC\omega} = \frac{(-1)^p}{jC\omega} \left[\frac{1}{\xi} \operatorname{sh} p\alpha V_0 + \operatorname{ch} p\alpha I_0 \right] + \frac{(-1)^p}{jC\omega} v_0 \coth \frac{\alpha}{2} \frac{1}{\xi} (\operatorname{ch} p\alpha - 1),$$

où V_0 et I_0 sont définis par (17) et (18).

La tension accélératrice $V_{acc}(p)$ est constituée de deux termes caractéristiques. Le premier correspond à l'effet de la source, compte tenu de la perturbation causée à l'origine par les sources réparties le long de la ligne. Ce terme dépend de la puissance appliquée et de l'adaptation. Le deuxième terme correspond à l'effet des sources à l'amont du point considéré, il ne dépend que du courant du faisceau et de l'impédance caractéristique.

Pour avoir à considérer une quantité sans dimension et qui ne dépend que de la puissance d'entrée P_0 , posons

$$V(p) = jC\omega V_{acc} \sqrt{\frac{Re}{2P_0}}$$

soit

$$(24) \quad V(p) = \frac{2}{\sqrt{x(1+x)}} [x \operatorname{ch} p\alpha (1 - u \cos \varphi) - \operatorname{th} N\alpha \operatorname{sh} p\alpha (x + u \cos \varphi)] + \frac{2u \cos \varphi}{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{ch} \frac{N}{2}\alpha}{\operatorname{ch} \left(\frac{N}{2} - 1 \right)\alpha} (\operatorname{ch} p\alpha - 1) - \frac{j u \sin \varphi}{\sqrt{x}} \times \left[\frac{2}{1+x} (\operatorname{th} N\alpha \operatorname{sh} p\alpha + x \operatorname{ch} p\alpha) - \frac{2 \operatorname{ch} \frac{N}{2}\alpha}{\operatorname{ch} \left(\frac{N}{2} - 1 \right)\alpha} (\operatorname{ch} p\alpha - 1) \right],$$

relation que l'on peut mettre sous la forme

$$(25) \quad V(p) = A + jB,$$

d'où en posant

$$(26) \quad \psi = \text{Arctg} \frac{B}{A},$$

on tire la tension accélératrice effective :

$$(27) \quad U = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\psi - \varphi)$$

comme le montre le diagramme vectoriel de la figure 8.

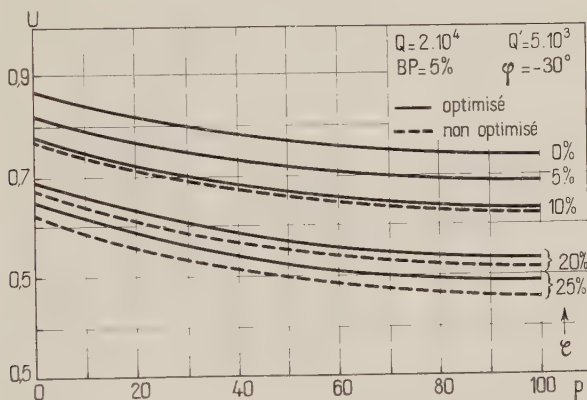


Fig. 11. — Évolution de l'amplitude du champ électrique le long de l'accélérateur pour une phase synchrone au départ de -30° .

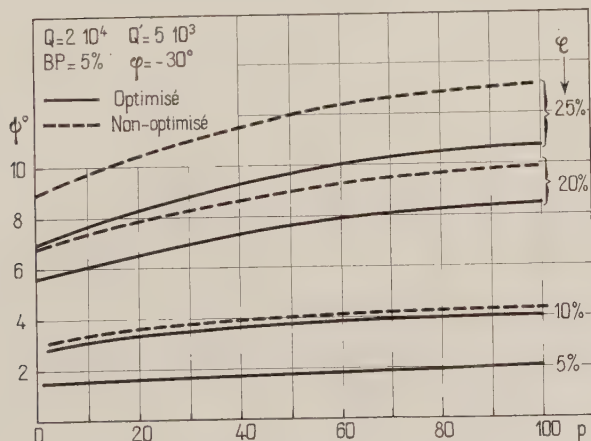


Fig. 12. — Évolution de la phase entre le faisceau et le champ accélérateur pour une phase synchrone au départ de -30° .

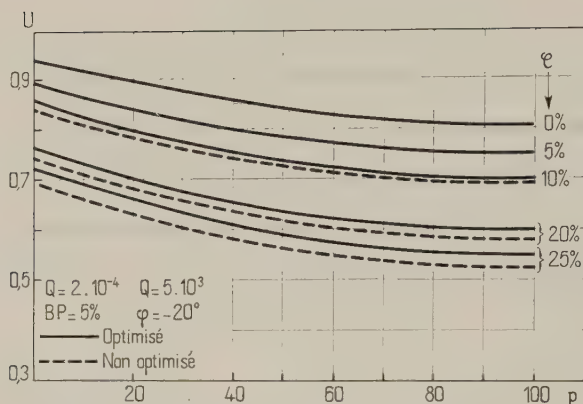


Fig. 13. — Évolution de l'amplitude du champ électrique le long de l'accélérateur pour une phase synchrone au départ de -20° .

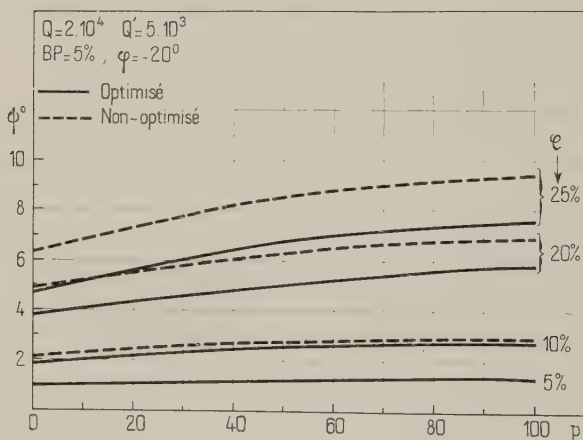


Fig. 14. — Évolution de la phase entre le faisceau et le champ accélérateur pour une phase synchrone au départ de -20° .

Signalons que dans l'expression (24), u ne représente pas tout à fait la charge du faisceau car il dépend de x . Le vrai paramètre est c .

Les figures 11 et 12 montrent les résultats de calcul, donnant l'évolution de l'amplitude et de la phase le long d'un accélérateur constitué de 100 périodes de structure bipériodique. On y voit l'effet de la longueur de la ligne sur l'amplitude et sur la phase du champ accélérateur. Les courbes en trait plein correspondent à l'optimum et les courbes en pointillés au cas où l'adaptation est réalisée seulement en absence de faisceau. On remarque un gain sur le champ et surtout sur le glissement de phase. L'angle de phase a été fixé à -30° . Les figures 13 et 14 correspondent à un angle de phase de -20° .

4. CHARGE DE FAISCEAU DANS UNE LIGNE ACCÉLÉRATRICE MONO ET BIPÉRIODIQUE EN RÉGIME TRANSITOIRE.

L'utilisation de la transformation de Laplace pour étudier les régimes transitoires des circuits électriques est une technique courante. Le cas d'un circuit oscillant unique, celui d'un filtre passe-haut ou passe-bas de structure simple se trouvent abondamment traités dans la littérature classique. Il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit par exemple d'un filtre passe-bande de structure tant soit peu complexe.

Assimilant un guide accélérateur à un tel filtre, Liess et Schrack ([2], [3]) ont traité le problème en linéarisant la relation de dispersion. Cependant, la fonction de transfert utilisée par eux s'avère incomplète, ce qui explique les résultats assez étonnants et les désaccords avec ceux obtenus par Epsztein et Mangin [4] qui, eux, pensant éviter l'effet de la linéarisation⁽²⁾ utilisent une autre méthode. Au lieu de considérer les variables (ω, t) comme dans la technique de la transformation de Laplace, ils considèrent les variables (φ, z) . Ce faisant, ils évitent de parcourir tout l'axe des ω sur lequel la relation de dispersion linéarisée ne saurait être partout valable. Cependant, cela n'est pas la raison qui distingue les résultats obtenus par ces auteurs, comme nous allons le démontrer par la suite.

Dans ce chapitre, utilisant la technique de la transformation de Laplace et partant des relations de dispersion obtenues à partir des modèles à éléments localisés, on étudie les lignes accélératrices mono et bipériodiques à couplage électrique.

4. 1. Hypothèse de base et principe de calcul.

Les calculs qui suivent reposent sur les hypothèses suivantes :

a. La ligne accélératrice est assimilée à une chaîne de circuits couplés à éléments localisés.

b. On suppose que le régime transitoire n'intéresse qu'une bande passante. Le problème à plusieurs bandes est néanmoins envisageable, puisque les modes sont orthogonaux et par conséquent les effets s'ajoutent linéairement.

c. On ne considère que les particules sur l'axe de la structure. L'espace d'interaction est supposé infiniment petit et l'interaction entre l'onde et

⁽²⁾ En linéarisant la relation de dispersion, on détruit en effet sa parité qui résulte directement des équations de Maxwell.

les particules purement capacitive. Cette capacité est liée à l'impédance shunt et le coefficient de surtension de la structure par

$$(28) \quad C = \frac{Q}{\omega Z_{sh}}.$$

Elle est prise constante dans toute la bande passante considérée.

d. Le paquet de particules est assimilé à une impulsion Dirac.

Considérons une période de structure que nous représenterons par le quadripôle de la figure 15 et soit M la matrice de transfert que l'on peut mettre sous la forme

$$(29) \quad M = \begin{pmatrix} \text{ch } \theta & \xi \text{ sh } \theta \\ \frac{1}{\xi} \text{ sh } \theta & \text{ch } \theta \end{pmatrix},$$

où θ et ξ sont des fonctions connues lorsqu'on aura choisi le modèle. Le courant du faisceau étant assimilé à une source de courant d'impédance

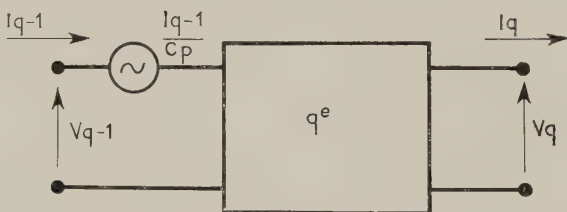


Fig. 15. — Schéma de principe du calcul du régime transitoire.

interne infinie, la tension induite dans la $q^{\text{ième}}$ cellule s'écrit, d'après les notations de la figure 15 :

$$(30) \quad v_q = \frac{i_{q-1}}{Cp},$$

on en déduit l'effet produit à la $(q+r)^{\text{ième}}$ cellule :

$$(31) \quad \mathbf{V}_{q+r} = M^{r+1} \left[\mathbf{V}_{q-1} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i_{q-1}}{Cp} \right].$$

Si l'on suppose que la ligne est adaptée aux deux extrémités, on déduit facilement que

$$(32) \quad I_{q+r} = \frac{1}{2\xi} \frac{1}{Cp} i_{q-1} e^{-(r+1)\theta},$$

où $i_{q-1} = p$, si l'on assimile le faisceau à un paquet de charges $\delta(t)$.

Ainsi, connaissant la courbe de dispersion, c'est-à-dire connaissant θ en fonction de la fréquence, on peut déduire la réponse de la ligne, au

passage d'un paquet de charge en un endroit quelconque de la ligne. Il suffit de trouver l'original $f_v(t)$ d'une fonction de transfert :

$$(33) \quad F_v(p) = \frac{1}{2\xi(p)} \frac{1}{C} \exp(-\nu\theta).$$

La fonction $\exp(-\nu\theta(p))$ étant souvent assez complexe, sauf pour des relations usuelles qu'on rencontre dans le calcul opérationnel, on utilisera à plusieurs reprises le théorème suivant que nous supposons démontré ici [5] et que nous désignerons par (T) dans la suite.

Si

$$(34) \quad F(p) = \mathcal{L} f(t)$$

et si

$$(35) \quad \frac{1}{\sqrt{p}} f\left(\frac{1}{p}\right) = \mathcal{L} h(t),$$

alors

$$(36) \quad p F(p^2) = \mathcal{L} \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

4.2. Lignes monopériodiques.

On considère d'abord le cas d'une ligne régulière à iris où le couplage se fait par champ électrique. Lorsqu'on néglige la perte, on a [1] :

$$(37) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \theta = K(1+p^2), \\ \frac{1}{\xi(p)} \frac{1}{Cp} = -\frac{C'}{C} (\sqrt{K^2(1+p^2)^2 - 1})^{-1}, \end{cases}$$

où

$$p = \frac{j\omega}{\omega_{\pi/2}}, \quad K^{-1} = BP = \frac{|\omega_{\pi} - \omega_0|}{\omega_{\pi/2}},$$

ω_0 , $\omega_{\pi/2}$, ω_{π} désignant respectivement les pulsations des modes 0, $\frac{\pi}{2}$ et π , et BP la bande passante. La fonction de transfert s'écrit alors

$$(38) \quad F_v(p) = \frac{C'}{CK} p \left[\frac{K^{-\nu}}{\sqrt{(1+p^2)^2 - \frac{1}{K^2}} \left\{ 1 + p^2 + \sqrt{(1+p^2)^2 - \frac{1}{K^2}} \right\}^{\nu}} \right].$$

Le terme entre crochets de la relation (38) est une fonction paire de p . On le désigne par $G(p^2)$ et on applique le théorème (T) du chapitre précédent. On connaît en effet l'original de $G(p)$:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} G(p) = e^{-t} I_{\nu}\left(\frac{t}{K}\right),$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \mathcal{G}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{p}} I_{\nu}\left(\frac{1}{Kp}\right) \equiv H(p).$$

Or, on peut obtenir l'original $h(t)$ en développant $H(p)$ et en calculant l'original terme à terme :

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} H(p) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2K}\right)^{\nu+2m} \frac{(\sqrt{t})^{\nu+2m-\frac{1}{2}}}{m!(m+\nu)!} J_{\nu+2m-\frac{1}{2}}(2\sqrt{t}),$$

d'où, d'après (36),

$$(39) \quad f_{\nu}(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h\left(\frac{t^2}{4}\right) = \frac{C'}{CK} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4K}\right)^{\nu+2m} \frac{t^{\nu+2m+\frac{1}{2}}}{m!(m+\nu)!} J_{\nu+2m-\frac{1}{2}}(t).$$

Dans la relation (39) C' représente la capacité de couplage, C celle du condensateur aux bornes duquel la tension v est effectivement induite et K l'inverse de la bande passante. On fait remarquer que le paramètre t figurant dans $f_{\nu}(t)$ est un temps réduit, il convient de le multiplier par $\omega \frac{\pi}{2}$ pour retrouver le temps réel.

On peut facilement étudier le comportement de (39).

Pour un temps t voisin de $\nu\tau$, τ étant le temps réduit que prend le paquet de charges pour parcourir une période de structure, la réponse prend la forme

$$(40) \quad f_{\nu}(t - \nu\tau) \simeq - \frac{C'}{CK} \left(\frac{1}{4K}\right)^{\nu} \frac{(t - \nu\tau)^{2\nu}}{\nu! 1.3 \dots (2\nu+1)}.$$

Le champ s'établit donc brusquement dans la première cellule et monte d'autant plus lentement que la cellule est loin et que la bande passante (K^{-1}) est faible.

Pour un temps $t \gg \nu\tau$, la fonction de Bessel du type sphérique $J_{\nu+2m-\frac{1}{2}}(t)$ se comporte comme une onde amortie :

$$J_{\nu+2m-\frac{1}{2}}(t) \xrightarrow[t \gg \nu\tau]{} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (-1)^m \cos\left(t - \nu \frac{\pi}{2}\right).$$

La réponse $f_{\nu}(t)$ s'écrit donc :

$$(41) \quad f_{\nu}(t) \simeq - \frac{C'}{CK} \cos\left(t - \nu \frac{\pi}{2}\right) J_{\nu}\left(\frac{t}{2K}\right).$$

C'est une fonction oscillante dont l'amplitude varie comme $J_{\nu}\left(\frac{t}{2K}\right)$. Les figures 16 a et 16 b en montrent l'allure.

Dans la pratique la relation (39) diffère peu de la relation (41). La différence d'amplitude est quasi imperceptible; quant à la phase,

on peut déceler un léger glissement qui est d'autant plus réduit que la bande passante est faible. Pour une bande passante de 1% par exemple, l'amplitude maximale de ce glissement ne dépasse pas $4,5 \cdot 10^{-4}$ rd et tend vers zéro pour les grandes valeurs de t .

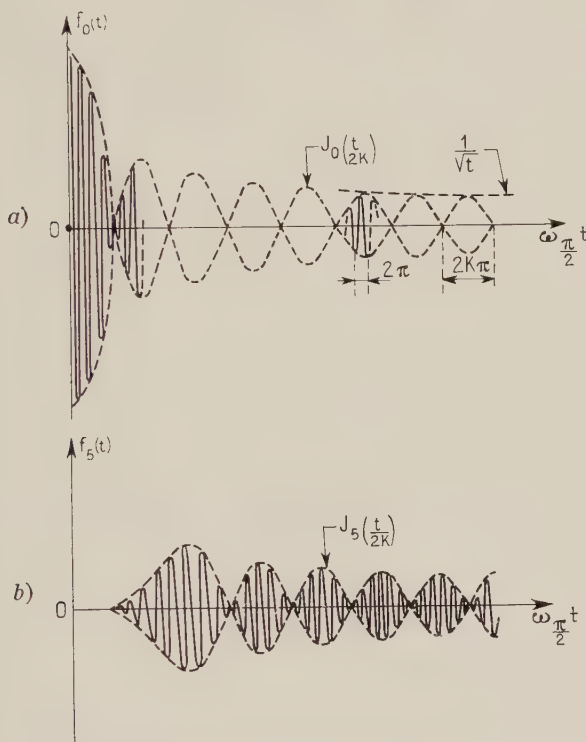


Fig. 16. — Allures de la réponse d'une ligne monopériodique à une impulsion de Dirac.

En linéarisant la relation de dispersion, Epsztein et Mangin ont obtenu la relation (41) qui est une forme approximative de notre résultat. Comme on l'a fait remarquer, l'écart entre ces résultats sont faibles lorsque la bande passante est faible. Par contre Liess et Schrack ont obtenu une relation toute différente :

$$(42) \quad f_v(t) = \frac{v J_v\left(\frac{t}{2K}\right)}{\frac{t}{2K}} \cos\left(t - \frac{v\pi}{2}\right).$$

En comparant la relation de transfert (38) à celle utilisée par ces auteurs, on s'aperçoit, dans cette dernière, en dehors de la différence des relations

de dispersion, de l'absence du terme ξ , c'est-à-dire l'impédance caractéristique qui dépend de la fréquence. Il en résulte le terme $\frac{\nu}{l}$ supplémentaire.

On a remarqué que le champ monte brusquement dans la première cellule ($\nu = 0$). Ceci résulte de l'hypothèse (c) qui suppose que l'espace d'interaction est infiniment petit. En réalité, le champ doit s'établir de la valeur nulle à cause de la propagation dans cet espace et surtout à cause des pertes par effet Joule. En introduisant cette perte dans la fonction de transfert (c'est-à-dire en remplaçant p par $p + \alpha$ et l'unité par $1 - \alpha^2$, α étant $\frac{2}{Q}$), on peut démontrer que la réponse devient

$$(43) \quad f_\nu(t) = -\frac{C'}{CK} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\alpha^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4K}\right)^{2m+\nu} \times \frac{(\sqrt{1-\alpha^2} t)^{2m+\nu+\frac{1}{2}}}{m! \Gamma(\nu+m+1)} J_{2m+\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{1-\alpha^2} t).$$

On s'aperçoit que (43) s'obtient à partir de (39), en multipliant la dernière expression par $\exp \frac{-\alpha t}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, et en remplaçant t par $\sqrt{1-\alpha^2} t$. Ce résultat est tout à fait classique.

4.3. Lignes bipériodiques.

Vis-à-vis du régime transitoire pour lequel les conditions aux limites perdent tout leur sens, les seules différences qui distinguent les cavités accélératrices des cavités de couplage sont leurs paramètres intrinsèques, à savoir leurs coefficients de surtension si on considère les pertes et leurs fréquences de résonance. Par conséquent, pour une ligne sans perte et dans laquelle les deux types de cavités résonnent à la même fréquence (absence de coupure dans la bande), l'établissement du régime transitoire est le même dans chaque type de cavité et la réponse $f_\nu(t)$ peut s'obtenir à partir de (39) en remplaçant simplement ν par 2ν .

Donc, considérons seulement le cas où les deux cavités n'ont pas la même fréquence de résonance, c'est-à-dire lorsqu'il existe une bande interdite. On a

$$(44) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} \theta = K(p^2 + 1)(p^2 + \lambda) - 1, \\ \frac{1}{\xi} \operatorname{sh} \theta = -K'(p^2 + 1), \end{cases}$$

en posant

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2}{\omega_{1, \frac{\pi}{2}}^2} - 1, \\ K = \frac{1}{2} C'^2 L_1 L_2 \omega_{1, \frac{\pi}{2}}^4, \quad K' = C'^2 L_2 \omega_{2, \frac{\pi}{2}}^2. \end{array} \right.$$

$\omega_{1, \frac{\pi}{2}}$ et $\omega_{2, \frac{\pi}{2}}$ étant les fréquences de résonance des deux types de cavités.

La fonction de transfert s'écrit :

$$(46) \quad F_v(p) = - \frac{K' p(p^2 + 1)}{KC} \frac{K'}{\left\{ \sqrt{\left[(p^2 + 1)(p^2 + \lambda) - \frac{1}{K} \right]^2 - \frac{1}{K^2}} \right.} \\ \times \left\{ (p^2 + 1)(p^2 + \lambda) - \frac{1}{K} \right. \\ \left. \left. + \sqrt{\left[(p^2 + 1)(p^2 + \lambda) - \frac{1}{K} \right]^2 - \frac{1}{K^2}} \right\}^\gamma \right\}.$$

Désignons par $G_1(p^2)$ le terme entre accolades de la fonction de transfert (46). Or

$$(p^2 + 1)(p^2 + \lambda) - \frac{1}{K} = (p^2 + \beta)^2 - \gamma,$$

en posant

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta = \frac{1 + \lambda}{2} - 1, \\ \gamma = \frac{1}{K} + \frac{(\lambda - 1)^2}{4} \simeq \frac{BP^2}{2} + BI^2, \end{array} \right.$$

où BP et BI sont respectivement la bande passante et la bande interdite, λ étant le rapport des carrés des fréquences limites de la bande interdite, donc voisin de l'unité, β aussi est voisin de l'unité; γ est lié à la bande passante et à la bande interdite d'une façon simple. Avec ces nouveaux paramètres, $G_1(p^2)$ s'écrit :

$$(48) \quad G_1(p^2) = \frac{K^{-\gamma}}{\left\{ \sqrt{[(p^2 + \beta)^2 - \gamma]^2 - \frac{1}{K^2}} \right.} \\ \times \left\{ (p^2 + \beta)^2 - \gamma + \sqrt{[(p^2 + \beta)^2 - \gamma]^2 - \frac{1}{K^2}} \right\} \right\}}.$$

Pour trouver l'original de $G_1(p^2)$ et de là celle de $F_v(p)$, on applique deux fois le théorème (T) (voir Annexe 1). On obtient finalement :

$$(49) \quad f_v(t) = -\frac{K'}{KC} \frac{\pi}{2} \beta^2 \sum_{m,q} \left(\frac{1}{8K}\right)^{2m+v} \left(\frac{\gamma}{4}\right)^m \left(\frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)^q \\ \times \frac{(2q+1)\beta J_{q-1}(\sqrt{\beta}t) + (1-\beta)t J_q(\sqrt{\beta}t)}{n! \Gamma(n+v+1) m! \Gamma\left(m+2n+v+\frac{3}{2}\right)},$$

en posant

$$q = 2m + 4n + 2v + \frac{1}{2}.$$

Lorsque $\beta \sim 1$, c'est-à-dire lorsque la bande interdite est faible devant la fréquence centrale, ce qui est souvent le cas, on a

$$(50) \quad f_v(t) = -\frac{K'}{KC} \pi \beta^2 \sum_{m,n} \left(\frac{1}{8K}\right)^{2n+v} \left(\frac{\gamma}{4}\right)^m \left(\frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)^q \\ \times \frac{J_{q-1}(\sqrt{\beta}t)}{n! \Gamma(n+v+1) m! \Gamma\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{4}\right)}.$$

Si l'on va plus loin en supposant que la bande interdite est faible devant la bande passante, c'est-à-dire lorsque

$$\gamma = \frac{1}{K} + \frac{(\lambda-1)^2}{4} \sim \frac{1}{K},$$

le calcul de l'Annexe 2 montre que (50) peut se simplifier et devient

$$(51) \quad f'_v(t) = -\frac{K'}{CK} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2K}}\right)^{2m+2v} \left(\frac{t}{\sqrt{\beta}}\right)^{2m+2v+\frac{1}{2}} \\ \times \frac{J_{2m+2v-\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta}t)}{m! (m+2v)!}.$$

La série double (50) se réduit à une série simple.

Au voisinage de $t=0$, les expressions (49), (50), (51) ont la même valeur limite :

$$(52) \quad f_v(t) \simeq -\frac{K'}{KC} \left(\frac{1}{8K}\right)^v \beta^{\frac{3}{2}} \frac{t^{4v}}{(2v)! 1.3.5 \dots (4v-1)},$$

par conséquent, la coupure ne fait qu'augmenter légèrement le signal par le facteur $\beta^{\frac{3}{2}}$ très voisin de l'unité.

Pour les valeurs de t assez grandes pour qu'on puisse assimiler la fonction de Bessel à sa valeur asymptotique, (51) s'écrit :

$$(53) \quad f'_v(t) = -\frac{K'}{KC} (-1)^v \beta^{\frac{3}{2}} \cos \sqrt{\beta} t J_{2v} \left(\frac{t}{\sqrt{2K\beta}} \right).$$

La présence d'une coupure a donc pour effet d'augmenter la fréquence des oscillations propres par un facteur $\sqrt{\beta}$ et de diminuer par contre celle des oscillations de l'enveloppe par le même facteur comme le montre la figure 17. Ce résultat est à comparer à celui de l'expression (43) où l'on

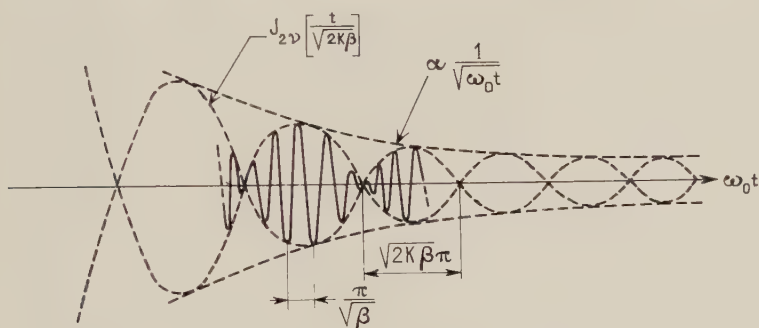


Fig. 17. — Comportement asymptotique de la réponse dans le cas d'une structure bipériodique avec une bande interdite faible.

a tenu compte de la perte. On remarque que les effets ne sont pas exactement les mêmes : l'abstraction faite du terme de l'affaiblissement dû à la perte, celle-ci fait en effet diminuer les deux fréquences de la même façon.

Considérons l'expression (50) correspondant au cas où l'on suppose la bande interdite faible devant la fréquence centrale sans qu'elle le soit devant la bande passante, c'est-à-dire $\beta \simeq 1$ mais $\gamma \neq \frac{1}{K}$ et considérons des instants t assez grands pour qu'on puisse assimiler la fonction de Bessel à sa valeur asymptotique. L'expression (50) devient

$$(54) \quad f_v(t) = -\frac{K'}{CK} (-1)^v \beta^{\frac{3}{2}} \frac{\cos \sqrt{\beta} t}{4 \sqrt{2\beta K}} t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{8K\sqrt{\beta}\gamma} \right)^{2n+v-\frac{1}{2}} \times \frac{J_{2n+v-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} t \right)}{n! (n+v)!}.$$

Remarquons en passant que lorsque $\gamma \simeq \frac{1}{K}$, on retrouve la relation (53) comme le montre la relation (A 3.4) établie dans l'Annexe 3.

La relation (54) montre qu'une bande interdite importante déforme l'enveloppe du signal. En particulier lorsque

$$t \gg 8K\sqrt{\beta\gamma} \simeq \frac{8\sqrt{2}}{BP},$$

$$(55) \quad f_v(t) = -\frac{K'}{CK} (-1)^v \beta^{\frac{3}{2}} \left(\frac{K\sqrt{\beta\gamma}}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \beta t$$

$$\times \cos \left(\frac{t}{4K\sqrt{\beta\gamma}} - \frac{v\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{t}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} - \frac{v\pi}{2} \right).$$

L'enveloppe résulte donc d'un battement de deux pulsations :

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = \frac{\omega_0}{4K\sqrt{\beta\gamma}} \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{\beta}} \frac{BP}{4\sqrt{2}\sqrt{1+2\left(\frac{BI}{BP}\right)^2}}, \\ \Omega_2 = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \frac{BP}{2\sqrt{2}\sqrt{1+2\left(\frac{BI}{BP}\right)^2}} \end{array} \right.$$

et a l'allure de la figure 18.

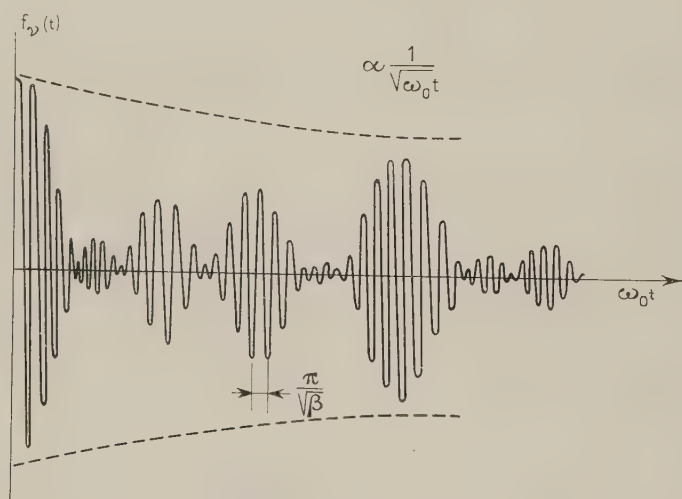


Fig. 18. — Comportement asymptotique de la réponse dans le cas d'une structure bipériodique avec une bande interdite importante.

Pulsations de battement :

$$\Omega_1 = \frac{\omega_0}{4K\sqrt{\beta\gamma}} \simeq \frac{\omega_0 BP}{4\sqrt{2}\sqrt{1+2\left(\frac{BI}{BP}\right)^2}},$$

$$\Omega_2 = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}} \simeq \frac{\omega_0 BP}{2\sqrt{2}\sqrt{1+2\left(\frac{BI}{BP}\right)^2}}.$$

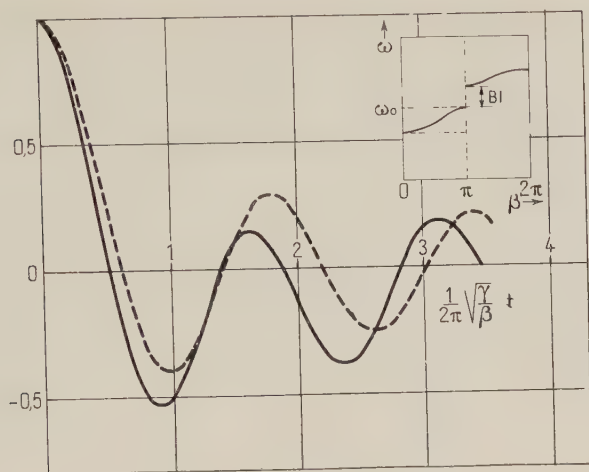


Fig. 19. — Enveloppe de la réponse dans la première cavité.

——— bande passante : 5 % ; bande interdite : 2 % ;
 - - - - - bande passante : 5 %, sans coupure.

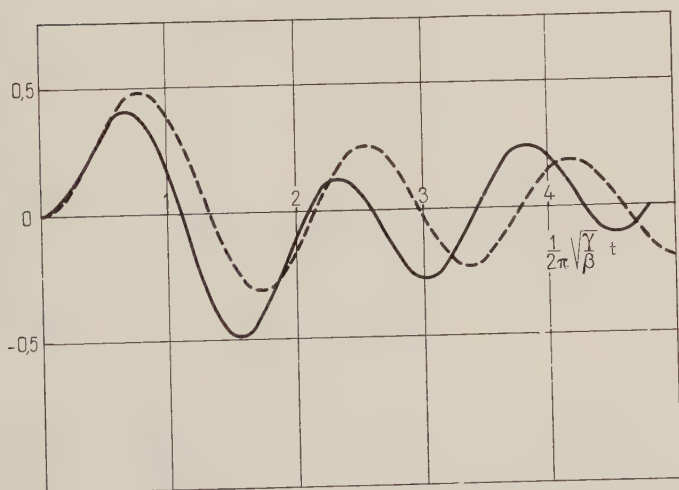


Fig. 20. — Enveloppe de la réponse dans la deuxième cavité.

——— bande passante : 5 % ; bande interdite : 2 % ;
 - - - - - bande passante : 5 %, sans coupure.

Un calcul précis de (54) permet d'apprécier l'effet de la bande interdite. Les figures 20 et 21 montrent les enveloppes des réponses à une impulsion de Dirac, apparue dans la période n° 0 à l'instant initial $t = 0$, respectivement dans celle-ci même ($\nu = 0$), dans la seconde ($\nu = 1$) et dans

la troisième ($\nu = 2$). On a considéré le cas d'une bande passante de 5% et une bande interdite de 2%. On observe un écart considérable entre ce cas et le cas où la bande interdite n'existe pas. On peut remarquer que le premier lobe est raccourci alors que le suivant s'accroît considérablement, l'amorce du battement est aussi remarquable.

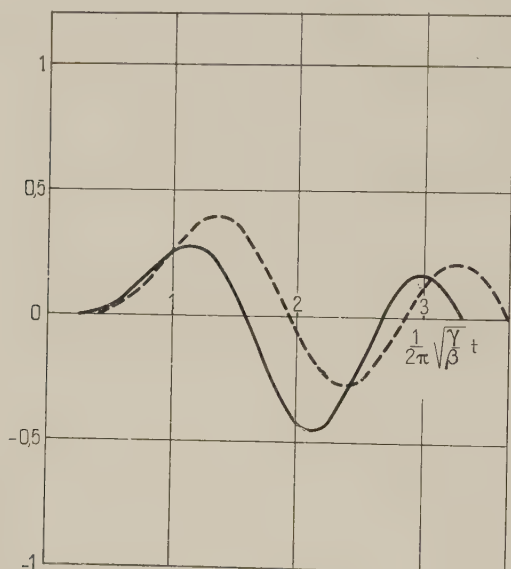


Fig. 21. — Enveloppe de la réponse dans la troisième cavité.

— bande passante : 5 %; bande interdite : 2 %;
 - - - - - bande passante : 5 %, sans coupure.

5. CONCLUSION.

Cette étude, purement théorique, et celle qui a fait l'objet d'un article précédent, paru dans cette même revue [1], constituent un ensemble de travaux destinés à l'exploration de nouveaux types de structures accélératrices. Dans cet article, nous avons essayé d'appliquer des modèles à éléments localisés aux calculs de la charge du faisceau en régime permanent et en régime transitoire.

Dans le premier cas, la seule restriction consiste à négliger l'effet de la dynamique des particules, en supposant le faisceau rigide. En toute rigueur, il s'agit en effet d'un phénomène non linéaire, puisque, au second ordre, la forme du faisceau, donc sa première harmonique, est modifiée non seulement par le champ appliqué mais aussi par le champ induit par le faisceau lui-même. Dans ces conditions, nous avons pu calculer

l'effet de la longueur de la ligne sur l'affaiblissement du champ, sur le glissement de phase et déterminer les conditions optimales de couplage entre la source et la ligne accélératrice, ceci, en présence du faisceau.

Dans le cas du régime transitoire, en dehors de la dernière restriction, nous n'avons pas tenu compte de l'effet du temps de transit. Nous avons supposé, en effet, l'espace d'interaction infiniment mince. Cette hypothèse est cependant d'autant plus réaliste qu'on considère des structures à tubes de glissement. En utilisant la technique de la transformation de Laplace, on arrive à étudier des cas assez complexes qu'on n'a pas pu examiner jusqu'à présent. Les résultats obtenus sur la structure bipériodique en particulier montrent, par exemple, que l'effet d'une bande interdite dans la bande passante est assez important et pourrait être observé expérimentalement.

ANNEXE 1.

Si l'on désigne par $G_1(p)$ la fonction $G_1(p^2)$ de (48) lorsqu'on y remplace p^2 par p , on obtient

$$(A\ 1.1) \quad G_1(p) = \frac{K^{-\nu}}{\left\{ \sqrt{[(p + \frac{\gamma}{2})^2 - \gamma]^2 - \frac{1}{K^2}} \times \left\{ (p + \frac{\gamma}{2})^2 - \gamma + \sqrt{[(p + \frac{\gamma}{2})^2 - \gamma]^2 - \frac{1}{K^2}} \right\}^{\nu} \right\}}.$$

Par translation, on a

$$(A\ 1.2) \quad \mathcal{L}^{\nu-1} G_1(p) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \mathcal{L}^{\nu-1} G_2(p^2),$$

où $G_2(p^2)$ désigne $G_1(p)$ lorsque $\beta = 0$. Or, on connaît l'original de $G_2(p)$, à savoir :

$$(A\ 1.3) \quad g_2(t) = \mathcal{L}^{\nu-1} G_2(p) = e^{\frac{\gamma}{2}t} I_{\nu} \left(\frac{t}{K} \right).$$

Appliquons le théorème (T) à la fonction $G_2(p^2)$ en écrivant :

$$(A\ 1.4) \quad H_2(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g_2 \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\gamma}{2}t} I_{\nu} \left(\frac{1}{Kp} \right).$$

Étudions le cas général où γ et K^{-1} sont très différents, c'est-à-dire lorsque la coupure est grande. En développant $H_2(p)$, et en calculant l'original terme à terme, on obtient

$$(A\ 1.5) \quad h_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2K} \right)^{2n+\nu} \frac{\gamma^{-\frac{1}{2}(2n+\nu-\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}(2n+\nu-\frac{1}{2})}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} I_{2n+\nu-\frac{1}{2}}(2\sqrt{\gamma}t).$$

D'où, d'après le théorème (T) :

$$(A\ 1.6) \quad \mathcal{L}^{-1} p G_2(p^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h_2\left(\frac{t^2}{4}\right).$$

Et, en intégrant (A 1.6) :

$$(A\ 1.7) \quad \mathcal{L}^{-1} G_2(p^2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_n \left(\frac{1}{4K}\right)^{2n+\nu} \times \frac{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2n+\nu+\frac{1}{2}}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} (\sqrt{\gamma} t)^{2n+\nu+\frac{1}{2}} J_{2n+\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\gamma} t).$$

On remonte ensuite à $G_1(p)$ d'après (A 1.2) et encore une fois, on applique le théorème (T) pour trouver l'original de $G_1(p^2)$. On pose pour cela :

$$(A\ 1.8) \quad g_1(t) = e^{-\beta t} (\sqrt{\gamma} t)^{2n+\nu+\frac{1}{2}} I_{2n+\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\gamma} t)$$

alors

$$(A\ 1.9) \quad \mathcal{L}^{-1} G_1(p) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4K}\right)^{2n+\nu} \frac{\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{2n+\nu+\frac{1}{2}}}{n! \Gamma(\nu+n+1)} g_1(t).$$

Or

$$(A\ 1.10) \quad H_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} g_1\left(\frac{1}{p}\right) = \gamma^{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{p^{\mu+\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\beta}{p}} I_{\mu}\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{p}\right),$$

avec

$$\mu = 2n + \nu + \frac{1}{2}$$

ou en développant I_{μ} ,

$$(A\ 1.11) \quad H_1(p) = \gamma^{\frac{\mu}{2}} \sum_m \frac{\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right)^{2m+\mu}}{m! \Gamma(\mu+m+1)} \frac{e^{-\frac{\beta}{p}}}{p^{2m+2\mu+\frac{1}{2}}}$$

dont on connaît l'original de chaque terme : d'où

$$(A\ 1.12) \quad h_1(t) = \gamma^{\frac{\mu}{2}} \sum_m \frac{\left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\right)^{2m+\mu}}{m! \Gamma(m+\mu+1)} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}}\right)^{2m+2\mu+\frac{1}{2}} J_{2m+2\mu+\frac{1}{2}}(2\sqrt{\beta} t)$$

et

$$(A\ 1.13) \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1} p G_1(p^2) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\beta} \sum_{m,n} \left(\frac{1}{8K} \right)^{2n+\nu} \left(\frac{\gamma}{4} \right)^m \left(\frac{t}{2\sqrt{\beta}} \right)^{2m+4n+2\nu+\frac{3}{2}}$$

$$\sim \frac{J_{2m+4n+2\nu+\frac{3}{2}}(\sqrt{\beta}t)}{n! \Gamma(n+\nu+1) m! \Gamma\left(m+2n+\nu+\frac{3}{2}\right)},$$

d'où, d'après (46) :

$$(A\ 1.14) \quad f_\nu(t) = -\frac{K'}{CK} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 \right) f(t)$$

et en posant $q = 2m + 4n + 2\nu + \frac{1}{2}$, on obtient finalement :

$$(A\ 1.15) \quad \boxed{f_\nu(t) = -\frac{K'}{CK} \frac{\pi}{2} \beta \sum \left(\frac{1}{8K} \right)^{2m+\nu} \left(\frac{\gamma}{4} \right)^m \left(\frac{t}{2\sqrt{\beta}} \right)^q}$$

$$\times \left[(2q+1) \beta J_{q-1}(\sqrt{\beta}t) + (1-\beta) t J_q(\sqrt{\beta}t) \right].$$

$$n! \Gamma(n+\nu+1) m! \Gamma\left(m+2n+\nu+\frac{3}{2}\right).$$

ANNEXE 2.

Si l'on considère le cas où la coupure est faible devant la bande passante, c'est-à-dire lorsque

$$(A\ 2.1) \quad \gamma = \frac{1}{K} + \frac{(\lambda-1)^2}{4} \simeq \frac{1}{K},$$

l'original de l'expression (A 1.4) se simplifie et devient

$$(A\ 2.2) \quad h'_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{1}{K}p} I_\nu \left(\frac{1}{K}p \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} I_{2\nu} \left(\sqrt{\frac{8t}{K}} \right)$$

d'où

$$(A\ 2.3) \quad \mathcal{L}^{-1} p G_2(p^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} t h'_2 \left(\frac{t^2}{1} \right) = I_{2\nu} \left(\sqrt{\frac{2}{K}} t \right)$$

et

$$(A\ 2.4) \quad \mathcal{L}^{-1} G_2(p^2) = \int_0^t I_{2\nu} \left(\sqrt{\frac{2}{K}} t \right) dt$$

ou, d'après (48),

$$(A\ 2.5) \quad g_1(t) = \mathcal{L}^{-1} G_1(p) = e^{-\beta t} \int_0^t I_{2\nu} \left(\sqrt{\frac{2}{K}} t \right) dt.$$

Appliquons le théorème (T), en écrivant :

$$(A\ 2.6) \quad H_1(p) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mathcal{G}_1\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\beta}{p}} \int_0^{\frac{1}{p}} I_{2\nu}\left(\sqrt{\frac{2}{K}} t\right) dt,$$

soit

$$(A\ 2.7) \quad H_p' = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2K}}\right)^{2m+2\nu} \frac{e^{-\frac{\beta}{p}}}{m!(m+2\nu)!(2m+2\nu+1)p^{2m+2\nu+\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$(A\ 2.8) \quad h'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2K}}\right)^{2m+2\nu} \frac{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}(2m+2\nu+\frac{1}{2})}}{m!(m+2\nu)!(2m+2\nu+1)} J_{2m+2\nu+\frac{1}{2}}(2\sqrt{\beta}t)$$

et

$$(A\ 2.9) \quad f_v'(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2K}}\right)^{2m+2\nu} \frac{\left(\frac{t}{2\sqrt{\beta}}\right)^{2m+2\nu+\frac{1}{2}}}{m!(m+2\nu)!(2m+2\nu+1)} J_{2m+2\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta}t),$$

Finalement :

$$(A\ 2.10) \quad f_v'(t) = -\frac{K'}{CK} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1\right) f_1(t) \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2K}}\right)^{2m+2\nu} \left(\frac{t}{\sqrt{\beta}}\right)^{2m+2\nu+\frac{1}{2}} \\ \times \left\{ \frac{2(2m+2\nu+1)\beta J_{2m+2\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta}t)}{m!(m+2\nu)!(2m+2\nu+1)} \right. \\ \left. - (1-\beta) J_{2m+2\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta}t) \right\}$$

ou, lorsque $\beta \approx 1$,

$$(A\ 2.11) \quad \boxed{f_v'(t) = -\frac{K'}{CK} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2K}}\right)^{2m+2\nu} \times \left(\frac{t}{\sqrt{\beta}}\right)^{2m+2\nu+\frac{1}{2}} \frac{J_{2m+2\nu+\frac{1}{2}}(\sqrt{\beta}t)}{m!(m+2\nu)!}}$$

ANNEXE 3.

Démonstration de

$$(A\ 3.1) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}t} I_{2\nu}(2\sqrt{2at}) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{\left(\sqrt{\frac{t}{a}}\right)^{2n+\nu-\frac{1}{2}}}{n!(n+\nu)!} I_{2n+\nu-\frac{1}{2}}(2\sqrt{at}),$$

formule encore valable pour les fonctions J .

En effet, on a d'une part,

$$(A\ 3.2) \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{\frac{a}{p}}}{\sqrt{p}} I_{\nu}\left(\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}t} I_{2\nu}(\sqrt{8at})$$

et d'autre part, d'après (A 1.4) et (A 1.5),

$$(A\ 3.3) \quad \mathcal{L}^{-1} \frac{e^{\frac{a}{p}}}{\sqrt{p}} I_{\nu}\left(\frac{b}{p}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{2}\right)^{2n+\nu} \frac{\left(\sqrt{\frac{t}{a}}\right)^{2n+\nu-\frac{1}{2}}}{n! \Gamma(n+\nu+1)} I_{2n+\nu-\frac{1}{2}}(2\sqrt{at})$$

en développant I_{ν} et en calculant l'original terme à terme, on s'aperçoit alors que si l'on fait $a = b$, on retrouve (A 3.1).

En remplaçant t par t^2 dans (A 3.1), on a

$$(A\ 3.4) \quad I_{2\nu}(2\sqrt{2at}) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{2}t\right)^{2n+\nu+\frac{1}{2}}}{n!(n+\nu)!} I_{2n+\nu-\frac{1}{2}}(2\sqrt{at}),$$

ce que l'on peut vérifier terme à terme. En effet, le terme de degré $2\nu + 2p$ peut s'écrire :

$$(A\ 3.5) \quad \frac{\sqrt{\pi} \left(\sqrt{\frac{a}{2}}t\right)^{2p+2\nu}}{\Gamma\left(p+\nu+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^k \frac{2^{p-2n}}{n!(n+\nu)!(p-2n)!} = \frac{(\sqrt{2at})^{2p+2\nu}}{p!(p+2\nu)!} S_p,$$

où $k = \frac{p}{2}$ ou $\frac{p-1}{2}$ suivant que p est pair ou impair. On peut vérifier ainsi de proche en proche que

$$S_0 = S_1 = S_2 = \dots = S_n = 1.$$

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] TRAN DUC TIEN, *Structures accélératrices bi et tripériodiques* (*Revue Technique THOMSON-CSF*, vol. 1, n° 2, juin 1969).
 - [2] J. E. LEISS et R. A. SCHRACK, *Transient and beam loading phenomena in linear electron accelerator* (*N. B. S. Internal Report*, 30 octobre, 1962).
 - [3] J. E. LEISS, *Beam loading in linear accelerator* (*I. E. E. E. Transactions on Nuclear Science*, vol. NS-12, n° 3, juin 1965, p. 566).
 - [4] B. EPSZTEIN et J. P. MANGIN, *Transients in electron linacs* (*Proceedings of the 1966 linear accelerator conference*, 3-7 octobre 1966, LA 3609, Los Alamos Scientific Laboratory).
 - [5] N. W. MC LACHLAN et P. HUMBERT, *Formulaire pour le calcul symbolique* (*Mémorial des Sciences mathématiques*, fascic. nos 100 et 103).
-

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

55, Quai des Grands-Augustins, 55

179805-69

Imprimé en France